Activité : représentation graphique d'un polynôme du second degré

On a vu qu'une fonction polynôme du second degré peut s'écrire sous trois formes :

- la forme développée $f(x) = ax^2 + bx + c$
- la forme factorisée (lorsqu'il y a deux racines) $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
- la forme canonique $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$

Nous allons à présent observer la représentation graphique de fonctions du second degré et le rôle que joue les différents paramètres.

1.Représentation graphique et forme développée

a) Ouvrir Géogebra.
Dans la fenêtre de saisie , entrer la fonction $ax^2 + bx + c$.

b)Obtenir la fonction $2x^2 + 4x + 3$ en faisant varier les valeurs de $a, b\ et\ c$. Quelle forme obtient on ?

…………………………………………………………………..

c) Faire varier c à l'aide des flèches. La forme de la courbe est-elle modifiée ?

………………………………………………………..

d) Obtenir de nouveau la fonction $2x^2 + 4x + 3$ puis faire varier b à l'aide des flèches.
La forme de la courbe est-elle modifiée ?

………………………………………………………

e) Obtenir de nouveau la fonction $2x^2 + 4x + 3$ puis faire varier a à l'aide des flèches.
La forme de la courbe est-elle modifiée ?

…………………………………………………………………………………………………

f) **Compléter :**
« la représentation graphique d'une fonction du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$ est une …………………….. dont les ………………… sont orientées …………….............……….. et orientées ……………………………………………………»

Enregistrer votre travail sur clé usb (actch5part1.ggb)

2.Représentation graphique et forme factorisée (deux racines)

a) Ouvrir un nouveau fichier geogebra. Dans la fenêtre de saisie , entrer la fonction $a * (x - x\_1)(x - x\_2)$.
b)Obtenir la fonction $-2(x - 3)(x - 5)$
c) Faire varier $x_1\ et\ x_2$.
d) Compléter :
« la représentation graphique d'une fonction du second degré $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$est une …………………….. ………..……………..………………..
……………………………………………………»

Enregistrer votre travail sur clé usb (actch5part2.ggb)

3.Représentation graphique et forme canonique

a) a) Ouvrir un nouveau fichier geogebra. Dans la fenêtre de saisie , entrer la fonction Dans f(x) écrire l'expression $a*(x-\alpha)^2+\beta$ (retrouver α et β dans les caractères spéciaux)

b)Obtenir la fonction $-1(x-2)^2+4$

c) Faire varier α et β à l'aide des flèches.

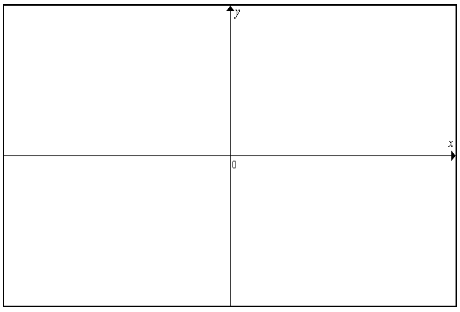
d) Compléter :

« la représentation graphique d'une fonction du second degré $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$ est une …………………….. qui admet la droite d'équation ………………………………….dont le sommet ……………..……………..……………….. ……………… »

Enregistrer votre travail sur clé usb (actch5part3.ggb)

4.Sens de variations d'une fonction du second degré

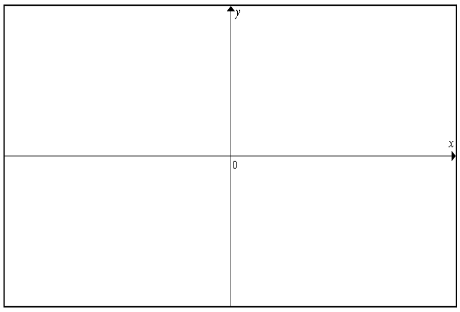
Si ....



Si ……… alors f est …………………………. ……………………………………..

x	$-\infty$ $+\infty$
$f(x)$	

Si ....



Si ……… alors f est …………………………. ……………………………………..

x	$-\infty$ $+\infty$
$f(x)$	

5.Application

Ouvrir edupython. Faire Nouveau nouveau module python et copier coller la fonction python ci-dessous :

```
def canonique(a,b,c):
   alpha = -b/(2*a)
   delta=b**2-4*a*c
   beta= -delta/(4*a)
   print("la forme canonique du polynome du second degré  ", a,"x²+",b,"x+",c, "est :")
   print(a,"(x-",alpha,")²+",beta)
```

Que permet de faire cette fonction ?

……………………………………………………………………………………..

Enregistrer le script sur votre clé usb (actch5part5.py)

Obtenir la forme canonique des fonctions polynômes du second degré ci-dessous puis dresser (sans justifier) le tableau de variations. Vérifier à l'aide de la calculatrice (prendre une fenêtre adaptée)

ax^2+bx+c	$a(x-\alpha)^2+\beta$	*Valeurs de* a, α, β	*Tableau de variations*	*Fenêtre graphique adaptée*
$x^2+100x-2100$	………………	………….. …………..		*[;]* *[;]*
$-8x^2+15x-21$	…………………	………….. …………..		*[;]* *[;]*

<u>Résolution d'un problème :</u>
une entreprise fabrique un produit pharmacentique. Le cout de production de *x* objets est $C(x)=3x^2-30000x+75\ 010\ 250$ (en euros).
Donner sans justifier la forme canonique de C.
Déterminer en justifiant le tableau de variation de C. Déterminer le cout minimum et la quantité à produire afin de réaliser ce minimum.

………

………

……..

………

………

………

2 Observation de paraboles

Soit une fonction polynôme du second degré $x \mapsto ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des nombres réels (a étant non nul). On note Δ le réel défini par $\Delta = b^2 - 4ac$.

1. On considère les fonctions polynômes f, g, h, i et j définies respectivement, pour tout réel x, par :

$f(x) = 3x^2 + 2x - 5$ $\quad g(x) = -9x^2 + 13x + 10$ $\quad h(x) = 6x^2 + 5x$

$i(x) = 5x^2 + x + 3$ $\quad j(x) = 2x^2 - 8x + 8$

a. Pour chacune de ces fonctions, identifier les coefficients a, b, c et calculer Δ.
Recopier le tableau ci-dessous et compléter les quatre premières colonnes.

	a	b	c	Δ	N
$f(x)$					
$g(x)$					
$h(x)$					
$i(x)$					
$j(x)$					

b. À l'aide d'une calculatrice, tracer la représentation graphique de chacune de ces fonctions et noter le nombre N de points d'intersection entre chaque parabole et l'axe des abscisses.
Compléter la dernière colonne du tableau.

c. Quel semble être le lien entre le signe de Δ et N ?

2. Si $\mathscr{C}$ est la courbe représentative d'une fonction f, les solutions éventuelles de l'équation $f(x) = 0$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de l'axe des abscisses.
Quel semble être le lien entre le nombre de solutions de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ (où a, b et c sont des réels quelconques, a étant non nul) et le signe du réel $\Delta = b^2 - 4ac$?

2 Observation de paraboles

Soit une fonction polynôme du second degré $x \mapsto ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des nombres réels (a étant non nul). On note Δ le réel défini par $\Delta = b^2 - 4ac$.

1. On considère les fonctions polynômes f, g, h, i et j définies respectivement, pour tout réel x, par :

$f(x) = 3x^2 + 2x - 5$ $\quad g(x) = -9x^2 + 13x + 10$ $\quad h(x) = 6x^2 + 5x$

$i(x) = 5x^2 + x + 3$ $\quad j(x) = 2x^2 - 8x + 8$

a. Pour chacune de ces fonctions, identifier les coefficients a, b, c et calculer Δ.
Recopier le tableau ci-dessous et compléter les quatre premières colonnes.

	a	b	c	Δ	N
$f(x)$					
$g(x)$					
$h(x)$					
$i(x)$					
$j(x)$					

b. À l'aide d'une calculatrice, tracer la représentation graphique de chacune de ces fonctions et noter le nombre N de points d'intersection entre chaque parabole et l'axe des abscisses.
Compléter la dernière colonne du tableau.

c. Quel semble être le lien entre le signe de Δ et N ?

2. Si $\mathscr{C}$ est la courbe représentative d'une fonction f, les solutions éventuelles de l'équation $f(x) = 0$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de l'axe des abscisses.
Quel semble être le lien entre le nombre de solutions de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ (où a, b et c sont des réels quelconques, a étant non nul) et le signe du réel $\Delta = b^2 - 4ac$?

Activité : représentation graphique d'un polynôme du second degré

On a vu qu'une fonction polynôme du second degré peut s'écrire sous trois formes :

- la forme développée $f(x) = ax^2 + bx + c$
- la forme factorisée (lorsqu'il y a deux racines) $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
- la forme canonique $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$

Nous allons à présent observer la représentation graphique de fonctions du second degré et le rôle que joue les différents paramètres.

1.Représentation graphique et forme développée

a) Ouvrir Géogebra.
Dans la fenêtre de saisie , entrer la fonction $ax^2 + bx + c$.

b)Obtenir la fonction $2x^2 + 4x + 3$ en faisant varier les valeurs de $a, b\ et\ c$. Quelle forme obtient on ?

On obtient une parabole.

c) Faire varier c à l'aide des flèches. La forme de la courbe est-elle modifiée ?

On obtient toujours une parabole.

d) Obtenir de nouveau la fonction $2x^2 + 4x + 3$ puis faire varier b à l'aide des flèches.
La forme de la courbe est-elle modifiée ?

On obtient toujours une parabole.

e) Obtenir de nouveau la fonction $2x^2 + 4x + 3$ puis faire varier a à l'aide des flèches.
La forme de la courbe est-elle modifiée ?

On obtient toujours une parabole mais l'orientation des branches dépend du signe de a.

f) **Compléter :**
« la représentation graphique d'une fonction du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$ est une parabole dont les branches sont orientées vers le haut lorsque a>0 et orientées vers le bas lorsque a<0»

Enregistrer votre travail sur clé usb (actch5part1.ggb)

2.Représentation graphique et forme factorisée (deux racines)

a) Ouvrir un nouveau fichier geogebra. Dans la fenêtre de saisie , entrer la fonction $a * (x - x\_1)(x - x\_2)$.
b)Obtenir la fonction $-2(x - 3)(x - 5)$
c) Faire varier $x_1\ et\ x_2$.
d) Compléter :
« la représentation graphique d'une fonction du second degré $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$est une parabole qui coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisse $x_1\ et\ x_2$»

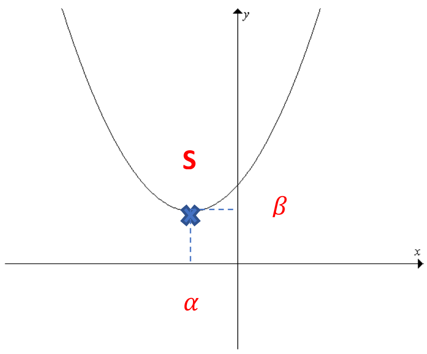
Enregistrer votre travail sur clé usb (actch5part2.ggb)

3.Représentation graphique et forme canonique

a) a) Ouvrir un nouveau fichier geogebra. Dans la fenêtre de saisie , entrer la fonction Dans f(x) écrire l'expression $a * (x - \alpha)^2 + \beta$ (retrouver α et β dans les caractères spéciaux)
b)Obtenir la fonction $-1(x-2)^2 + 4$
c) Faire varier α et β à l'aide des flèches.
d) Compléter :
« la représentation graphique d'une fonction du second degré $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ est une parabole qui admet la droite d'équation x= α comme axe de symétrie dont le sommet S a pour coordonnées $(\alpha; \beta)$»
Enregistrer votre travail sur clé usb (actch5part3.ggb)

4.Sens de variations d'une fonction du second degré

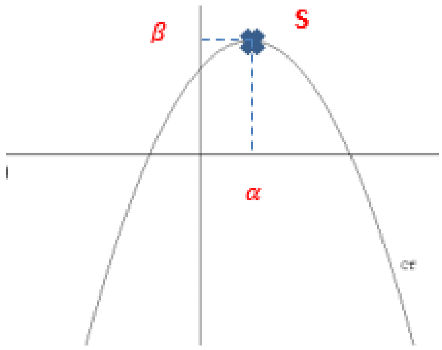
Si $a > 0$



Si $a > 0$ alors f est décroissante sur]-∞ ; α] et croissante sur $[\alpha; +\infty[$

x	-∞	α	+∞
$f(x)$	↘	β	↗

Si $a < 0$



Si $a < 0$ alors f est croissante sur]-∞ ; α] et décroissante sur $[\alpha; +\infty[$

x	-∞	α	+∞
$f(x)$	↗	β	↘

5.Application

Ouvrir edupython. Faire Nouveau nouveau module python et copier coller la fonction python ci-dessous :

```
def canonique(a,b,c):
    alpha = -b/(2*a)
    delta=b**2-4*a*c
    beta= -delta/(4*a)
    print("la forme canonique du polynome du second degré  ", a,"x²+",b,"x+",c, "est :")
    print(a,"(x-",alpha,")²+",beta)
```

Que permet de faire cette fonction ?

Cette fonction python permet d'obtenir la forme canonique d'un polynome du second degré sous forme développée.

Enregistrer le script sur votre clé usb (actch5part5.py)

Obtenir la forme canonique des fonctions polynômes du second degré ci-dessous puis dresser (sans justifier) le tableau de variations. Vérifier à l'aide de la calculatrice (prendre une fenêtre adaptée)

ax^2+bx+c	$a(x-\alpha)^2+\beta$	*Valeurs de* a, α, β	*Tableau de variations*	*Fenêtre graphique adaptée*
$x^2+100x-2100$	$1(x+50)^2-4600$	$a=1, \alpha=-50, \beta=-4600$	*x* : *-50* *f(x)* : *-4600*	*[-150 ; 50]* *[-5000 ; 10000]*
$-8x^2+15x-21$	$-8(x-0.9375)^2-13.96875$	$a=1, \alpha=0{,}9375, \beta=-13{,}96875$	*0,93875* *-13,96875*	*[-5 ; 5]* *[-50 ; -10]*

<u>Résolution d'un problème</u> :
une entreprise fabrique un produit pharmacentique. Le cout de production de *x* objets est *C(x)=3x²-30000x+75 010 250* (en euros).
Donner sans justifier la forme canonique de C.
Déterminer en justifiant le tableau de variation de C. Déterminer le cout minimum et la quantité à produire afin de réaliser ce minimum.

La forme canonique est $C(x)=3(x-5000)^2+10250$.
a=3 , $\alpha=5\,000, \beta=10\,250$

$a>0$ alors f est décroissante sur]-∞ ; 5000] et croissante sur [5000; +∞[

x	-∞	*5000*	+∞
$f(x)$		10 250	

Le cout minimum de production est obtenu pour 5000 objets produits . Le cout minimum est de 10 250 €.

Activité 2 Observation de paraboles

Cette activité a pour but d'introduire le discriminant d'un polynôme f du second degré et de montrer le lien entre le signe de Δ et le nombre de solutions de l'équation f (x)= 0. Ici on utilise la calculatrice pour visualiser le nombre de solutions, qui sont les abscisses des points d'intersection de la parabole représentant f avec l'axe des abscisses.

	a	*b*	*c*	**Δ**	*N*
$f(x)$	3	2	–5	64	2
$g(x)$	–9	13	10	529	2
$h(x)$	6	5	0	25	2
$k(x)$	5	1	3	–59	0
$j(x)$	2	–8	8	0	1