Automatisme 2 : équations de droites dans le plan-fonctions affines

Les réciproques des propriétés sont vraies mais pas écrites afin de ne pas surcharger la rédaction

Equation cartésienne d'une droite Vidéos : mathssa.fr/equacart2 (3mns18s)

Théorème et définition :
Toute droite D admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a\,;b) \neq (0\,;0)$.
Un vecteur directeur de D est $\vec{u}(-b\,;a)$.
Cette équation est appelée **équation cartésienne** de la droite D.

Méthode : équation cartésienne à partir d'un point et d'un vecteur directeur

On considère un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan.
Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par le point $A(3\,;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\,(5\,;3)$.

Ainsi, comme $\vec{u}\,(\underbrace{5}_{-b}\ ;\ \underbrace{3}_{a})$ est un vecteur directeur de d, une équation de d est de la forme :

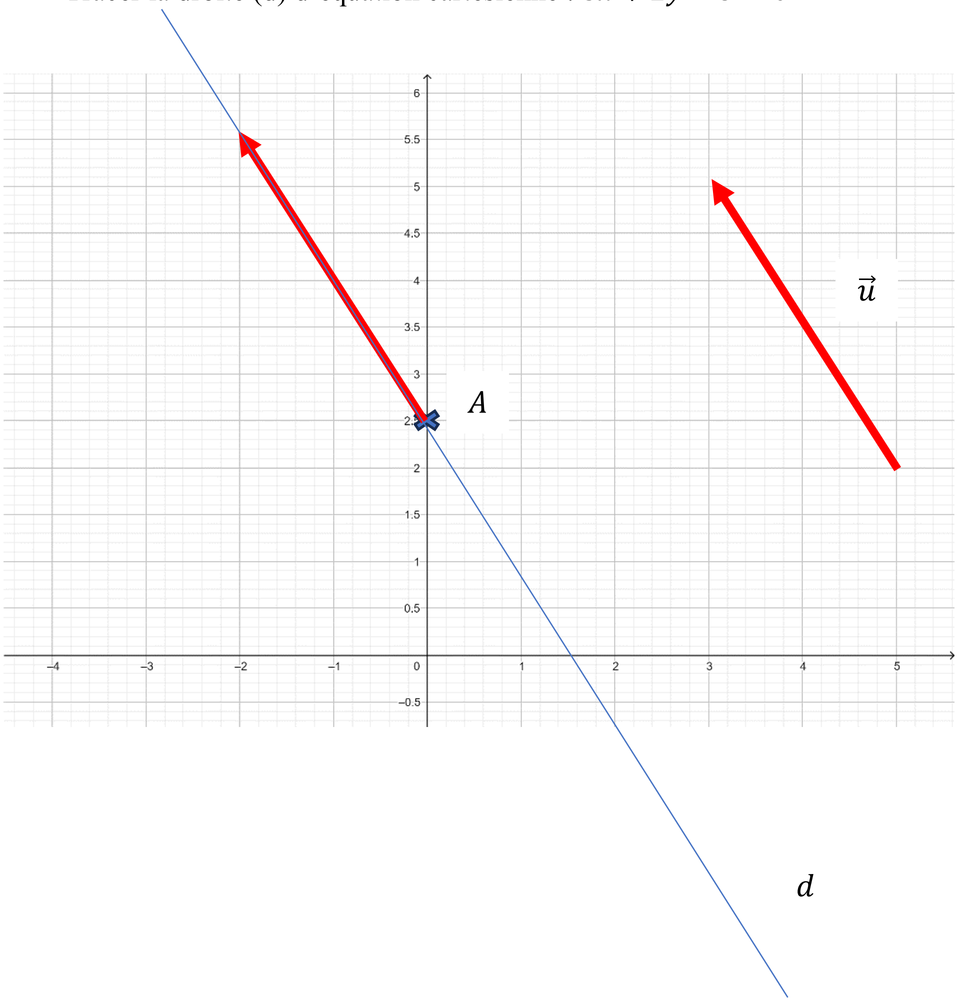
$3x - 5y + c = 0$

Pour déterminer c, il suffit de substituer les coordonnées de A dans l'équation.

$3 \times 3 - 5 \times 1 + c = 0$ soit $4 + c = 0$

$c = -4$ Une équation cartésienne de d est : $3x - 5y - 4 = 0$

Méthode : Tracer une droite à partir de son équation cartésienne
Vidéo : mathssa.fr/equacart4 (3mns44s)
Tracer la droite (d) d'équation cartésienne : $3x + 2y - 5 = 0$.



$a = 3 \quad b = 2$
Alors le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(-b\,;a)$ soit $(-2; 3)$ est un vecteur directeur de d.

On remplace x par 0.
$$3 \times 0 + 2y - 5 = 0$$
$$2y = 5$$
$$y = 2{,}5$$
A(0 ;2,5) appartient à la droite (d)

(d) est la droite passant par A(0 ;2,5) et de vecteur directeur $\vec{u}(-2; 5)$

Equation réduite d'une droite

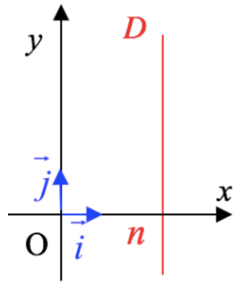
Vidéo : mathssa.fr/equdroite (de 6mns 40s jusqu'à 15mns 50s)

Propriété :

Soit $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère du plan. Soit D une droite du plan.

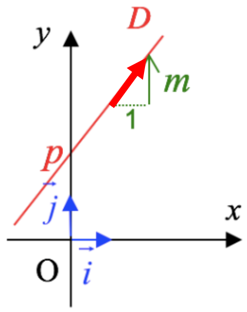
- Si D est parallèle à l'axe des ordonnées :

alors une équation de D est de la forme $x=n$,



- Si D n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées :

alors l'équation réduite de D est de la forme $y=mx+p$,
m s'appelle le **coefficient directeur** ou la **pente** de la droite
p s'appelle l'**ordonnée à l'origine**.



Propriété :

Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ sont deux points distincts d'une droite D tel que $x_A \neq x_B$ alors la droite D a pour pente (ou coefficient directeur) $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Méthode : équation réduite d'une droite à l'aide deux points Vidéo : mathssa.fr/pente (4mns30s)

Soit $A(4; -1)$ et $B(3; 5)$ deux points d'une droite d.
Déterminer une équation de la droite d.

Les points A et B sont d'abscisses différentes donc la droite d n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées. Elle est donc de la forme $y = mx + p$, où m et p sont deux nombres réels.

Le coefficient directeur de d est $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{5-(-1)}{3-4} = \dfrac{6}{-1} = -6.$

L'équation de d est donc de la forme : $y = -6x + p$

Comme $A(4; -1)$ appartient à la droite d, ses coordonnées vérifient l'équation de d soit :

$-1 = -6 \times 4 + p$ soit $-1 = -24 + p$ soit $p = -1 + 24 = 23$

Une équation de d est donc : $y = -6x + 23$

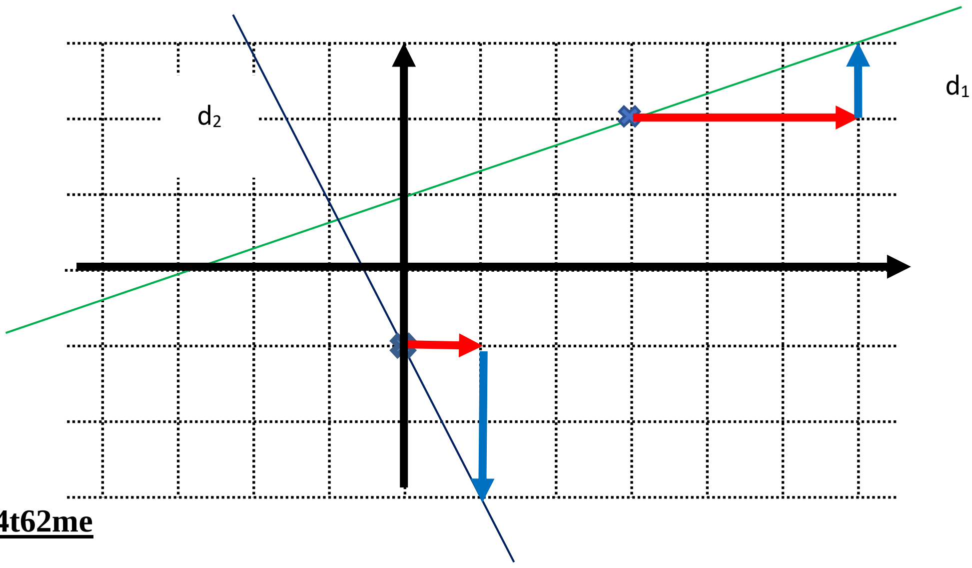
Remarques :

- $m = \dfrac{accroissement\ des\ ordonnées}{accroissement\ des\ abscisses}$.
- Lorsqu'on se déplace de 1 horizontalement, on se déplace de m verticalement.
- Toute droite de coefficient directeur nul est horizontale

Méthode : lire l'équation réduite de droite

$d_1 : y = \frac{1}{3}x + 1$

$d_2 : y = -2x - 1$



entrainement :

http://bref.jeduque.net/4t62me

Méthode : Représenter graphiquement une droite d'équation réduite donnée

Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan.Dans un repère, tracer les droites d_1, d_2 et d_3 d'équations réduites respectives : $y = 2x - 3$.

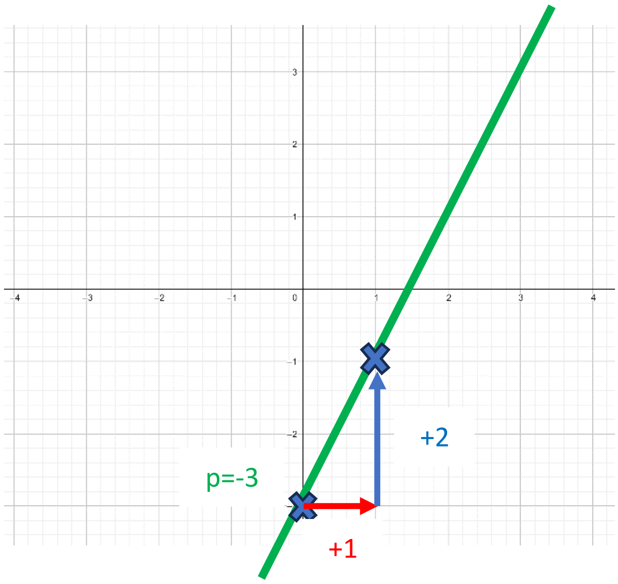
Soit la droite d_1 d'équation $y = 2x - 3$.

$\boldsymbol{m = 2}$

$\boldsymbol{p = -3}$

Ainsi la droite d_1 passe par le point de coordonnées (0 ;-3)

Partant de ce point si on avance de +1 « horizontalement » et de +2 « verticalement » , on retombe sur un deuxième point de la droite.



Application aux fonctions affines

Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$.

La représentation de la fonction affine f est la droite d'équation réduite $y = mx + p$.

Propriété :

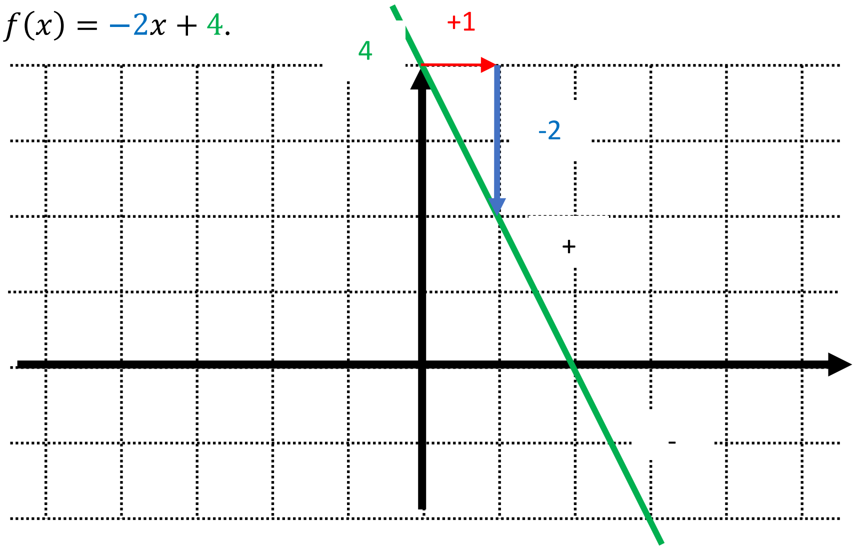
Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$.

- Si $m > 0$, alors f est croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $m < 0$, alors f est décroissante sur $\mathbb{R}$
- Si $m = 0$, alors f est constante sur $\mathbb{R}$.

Exercice : signe d'une fonction affine

Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x + 4$.

Dresser le tableau de signe de f.



$-2x + 4 = 0 \iff -2x = -4$

$\iff \quad x = \frac{-4}{-2} = 2$

Comme f est décroissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule en 2 , on en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		+	0	-	

Pour s'entrainer : http://bref.jeduque.net/7blkfc (faire les tableaux au brouillon)