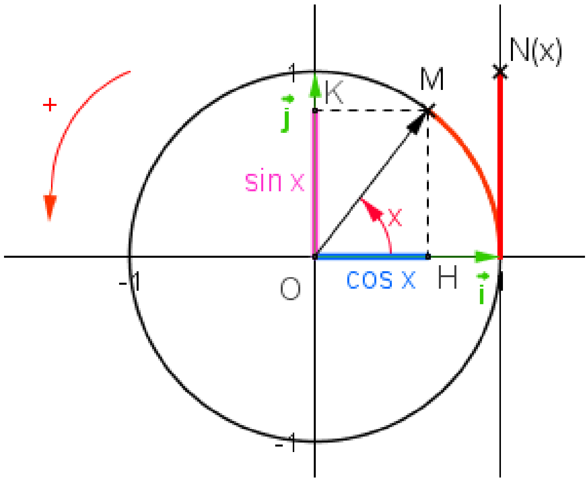
CHAPITRE 10 –produit scalaire 2ème partie

La notion de produit scalaire est apparue pour les besoins de la physique. Le concept relativement récent et a été introduit au milieu du XIXe siècle par le mathématicien allemand *Hermann Grassmann* (1809 ; 1877).
Il fut baptisé produit scalaire par *William Hamilton* (1805 ; 1865) en 1853.

Rappels du chapitre 4 :
Vidéo : mathssa.fr/trigo (de 11mns 45s à 18mns12s)



Propriétés :
1) $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ et $-1 \leq \cos(x) \leq 1$
2) $cos^2(x) + sin^2(x) =$ ...
3) $\sin(-x) =$ ... . et $\cos(-x) =$ .....
4) $\cos(x + 2k\pi) = \cos\,(x)$ où k entier relatif
5) $\sin\,(x + 2k\pi) = \sin\,(x)$ où k entier relatif

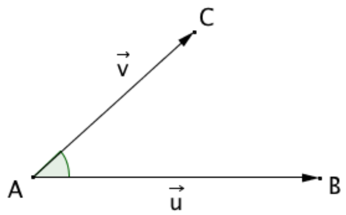
Valeurs remarquables des fonctions sinus et cosinus :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1					-1
$\sin x$	0					0

Une 1ère expression du produit scalaire

Définition : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
On appelle **produit scalaire** de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté $\vec{u}.\vec{v}$, le nombre réel défini par :

- $\vec{u}.\vec{v} =$ ..., si l'un des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul
- $\vec{u}.\vec{v} =$ ... ..., dans le cas contraire.



$\vec{u}.\vec{v}$ se lit "$\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$".

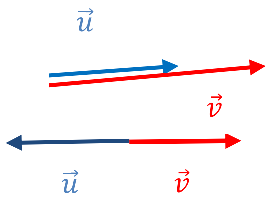
Remarques :

- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux représentants des vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ alors :

$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} =$ ... ...

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs colinéaires de même sens ,
  $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(0) =$ ... ...
  Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs colinéaires de sens contraire ,

$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\pi) =$ ... ...



Carré scalaire :

Définition : Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan.
On appelle carré scalaire de $\vec{u}$ le réel : ... ... Ce réel est aussi noté ... .
Ainsi ………………..

I-Propriétés du produit scalaire et applications :

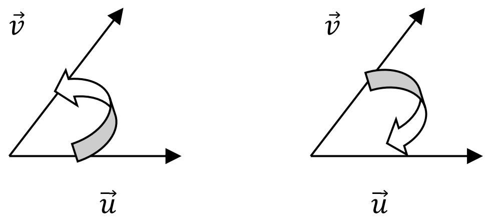
1. Propriété de symétrie et de bilinéarité du produit scalaire – identités remarquables

Vidéo : mathssa.fr/prodscal (5mns20s à 7mns 20s)

Propriété de symétrie :
Pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a : $\vec{u}.\vec{v} =$ … … … ..

Démonstration :
On suppose que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls (démonstration évidente dans le cas contraire).

$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times cos(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$
$= \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times cos(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$
$= \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times cos\big(-(\vec{v}\ ;\ \vec{u})\big)$
$= \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times cos(\vec{v}\ ;\ \vec{u})$
$= \vec{v}.\vec{u}$



Propriétés de bilinéarité : Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a :
1) $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \cdots$ … … … … … … … … ….
2) $\vec{u}.(k\vec{v}) = (k\vec{u}).\vec{v} = k \times \vec{u}.\vec{v}$, avec k un nombre réel.

Preuve : Admis –

Propriétés : Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :
1) $(\vec{u} + \vec{v})^2 =$ … … … … … … … … … … ..
2) $(\vec{u} - \vec{v})^2 =$ … … … … … … … … … … ..
3) $(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v}) =$ … … … … … … … … … … ..

Démonstration pour le 2) :
$(\vec{u} - \vec{v})^2 = (\vec{u} - \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v}) \quad = \vec{u}.\vec{u} - \vec{u}.\vec{v} - \vec{v}.\vec{u} + \vec{v}.\vec{v} \quad = \quad \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$

2. Une 2ème expression du produit scalaire

Vidéo : mathssa.fr/prodscal (de 7mns20s à 10mns 20s)

Propriété : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On a :
$\vec{u}.\vec{v} =$ … … … … … … … … … … ..

Et $\vec{u}.\vec{v} =$ … … … … … … … … … … ..

Démonstration de la première formule :
$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 \ = (\vec{u} - \vec{v})^2 \ = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2 \ = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
Donc $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
Soit $2\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2$
Et $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$

Propriété : Soit A, B et C trois points du plan. On a :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots..$

Démonstration :

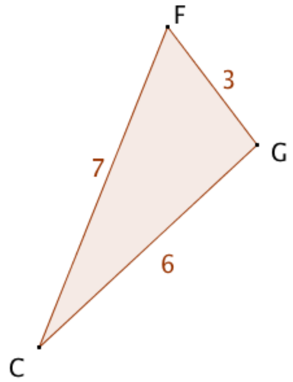
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\|^2\right) \quad or\ \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$$

$$= \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - \|\overrightarrow{CB}\|^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$$

Méthode : Calculer un produit scalaire à l'aide des normes

On considère la figure ci-contre, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{CG}.\overrightarrow{CF}$.



$\overrightarrow{CG}.\overrightarrow{CF} =$ **… … … … … ….**

$=$ **… … … …**

$=$ … … … … ….

$=$ …

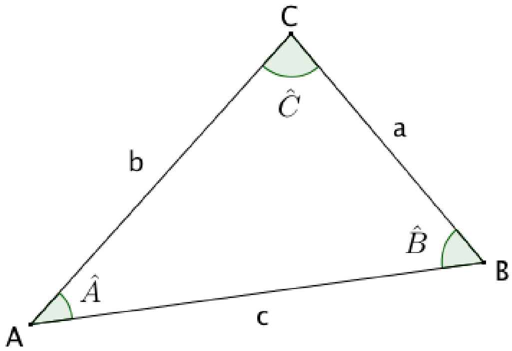
3. Théorème d'Al Kashi

Vidéo : mathssa.fr/prodscal (de 10mns20s à 11mns 50s)

A Samarkand, le savant perse *Jemshid ibn Massoud al Kashi (1380 ; 1430)* vit sous la protection du prince *Ulugh-Beg* (1394 ; 1449) qui a fondé une Université comprenant une soixantaine de scientifiques qui étudient la théologie et les sciences.
Dans son Traité sur le cercle (1424), *al Kashi* calcule le rapport de la circonférence à son rayon pour obtenir une valeur approchée de 2π avec une précision jamais atteinte. Il obtient 9 positions exactes en base 60 soit 16 décimales exactes :
$2\pi \approx 6{,}283\ 185\ 307\ 179\ 586\ 5$

Théorème : Dans un triangle ABC, on a, avec les notations de la figure :

$$a^2 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots….$$



Démonstration au programme :

$a^2 = \overrightarrow{BC}^2 = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)^2$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

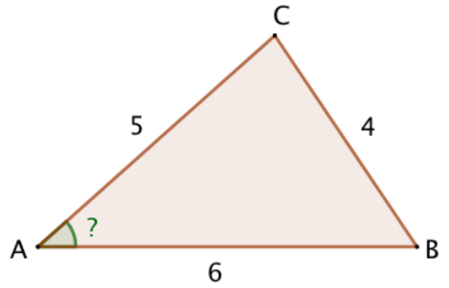
$= \ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Méthode : Appliquer le théorème d'Al Kashi Video : mathssa.fr/alkashi (5mns)

On considère la figure ci-dessous, calculer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ au degré près.



D'après le théorème d'Al Kashi, on a :

… … … … … … … … … … … … … ….

… … … … … … … … … … … … … ….

… … … … … … … … … … … … … ….

… … … … … … … … … … … … … ….

… … … … … … … … … … … … … ….

… … … … … … … … … … … … … ….

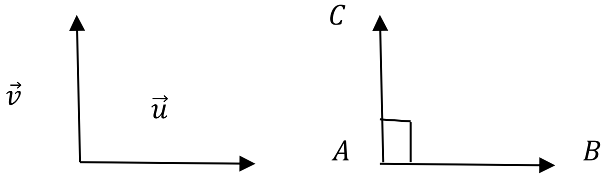
… … … … … … … … … … … … … ….

… … … … … … … … … … … … … ….

II- Produit scalaire et orthogonalité :

1.Vecteurs orthogonaux

vidéo : mathssa.fr/prodscal (de 11mns50s à 16mns30s)



Définition

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de représentants $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux signifie que

$soit\ \vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$

$soit$ les droites (AB) et (AC) sont ………………………………

Propriété :

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si … … … … …

Démonstration :Si l'un des vecteurs est nul, la démonstration est évidente.

Supposons le contraire.

$\vec{u}.\vec{v} = 0$

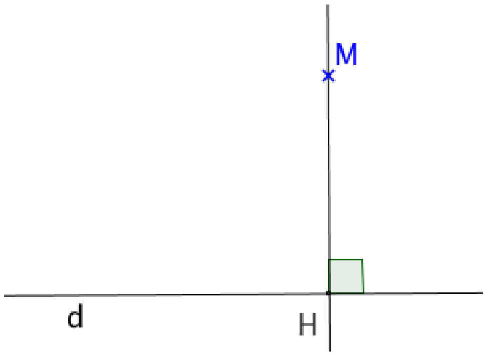
$\Leftrightarrow \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times cos(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = 0$

$\Leftrightarrow cos(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = 0$

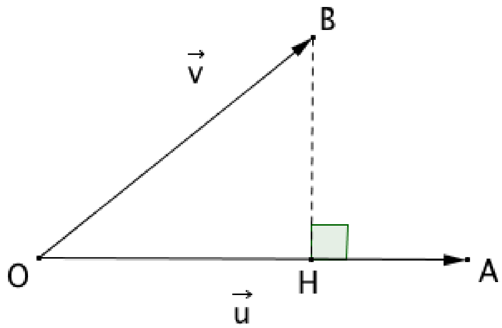
$\Leftrightarrow$ Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux

2.Projection orthogonale – 3ème expression du produit scalaire

Définition : Soit une droite *d* et un point M du plan.
Le **projeté orthogonal** du point M sur la droite *d* est le point d'intersection H de la droite *d* avec la perpendiculaire à *d* passant par M.



Propriété :
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.
H est le projeté orthogonal du point B sur la droite (OA).



On a : $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} =$ … … … … …

Démonstration :

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}.\left(\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HB}\right)$

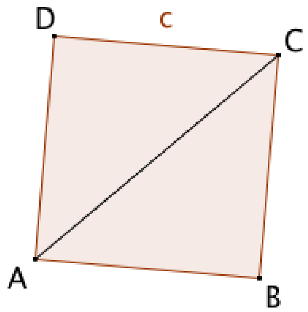
$= \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{HB}$ or les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{HB}$ sont orthogonaux donc $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{HB} = 0$.

$= \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$

Méthode : Calculer un produit scalaire par projection

video :mathssa.fr/prodscal2 (3mns)

Soit un carré ABCD de côté *c=4*.
Calculer les produits scalaires :
a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$



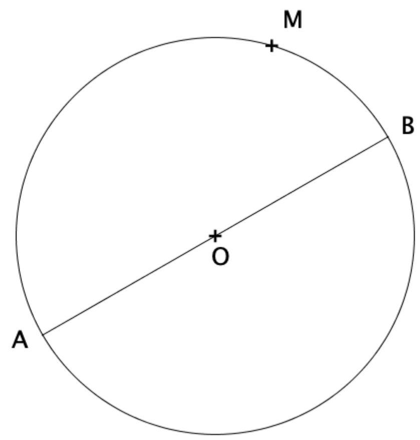
a) Par projection, on a :
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} =$ … … … … … … … … … … … ….

b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \cdots$ car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AD}$ sont ………………………..

3.Transformation de l'expression $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$

Propriété :
L'ensemble des points M vérifiant … ………………………… est le cercle de diamètre [AB].

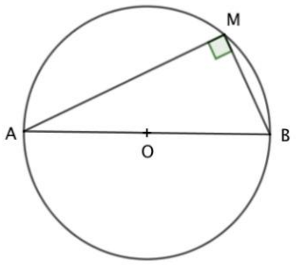
Démonstration au programme : vidéo : mathssa.fr/prodscal4



Soit O le milieu du segment [AB].
On a :
$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$
$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}\right).\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}\right) = 0$
Comme O est le milieu de [AB], on a : $\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA}$
Soit :
$\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}\right).\left(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA}\right) = 0$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{OA}^2 = 0$ car $(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$
$\Leftrightarrow MO^2 - OA^2 = 0$
$\Leftrightarrow MO^2 = OA^2$
$\Leftrightarrow MO = OA.$
M appartient donc au cercle de centre O et de rayon OA, c'est-à-dire le cercle de diamètre [AB].

Propriété :
Un point M, distinct de A et B, appartient au cercle de diamètre [AB] si et seulement si ....

Justification :
$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux



4.Produit scalaire dans un repère orthonormé – 4ème expression du produit scalaire

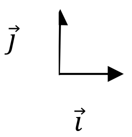
Vidéo : mathssa.fr/prodscal (de 16mns 30s à 18mns40s)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$.

Propriété :
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives $(x\,;y)$ et $(x'\,;y')$.
On a : $\vec{u}.\vec{v} =$ ... ...

Démonstration :

$$\begin{aligned}\vec{u}.\vec{v} &= (x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}).(x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath})\\ &= xx'\vec{\imath}.\vec{\imath} + xy'\vec{\imath}.\vec{\jmath} + yx'\vec{\jmath}.\vec{\imath} + yy'\vec{\jmath}.\vec{\jmath}\\ &= xx'\|\vec{\imath}\|^2 + xy'\vec{\imath}.\vec{\jmath} + yx'\vec{\jmath}.\vec{\imath} + yy'\|\vec{\jmath}\|^2\\ &= xx' + yy'\end{aligned}$$



car $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1$, le repère étant normé,
et $\vec{\imath}.\vec{\jmath} = \vec{\jmath}.\vec{\imath} = 0$, le repère étant orthogonal.

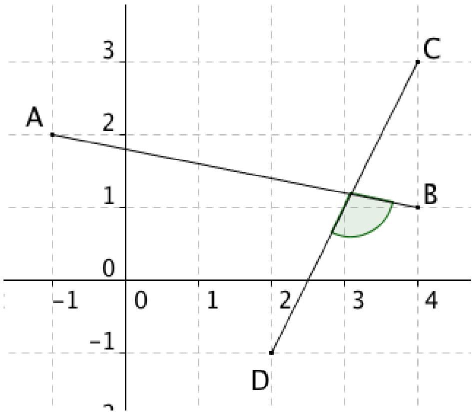
Méthode : Calculer un produit scalaire à l'aide des coordonnées

Soit $\vec{u}(5\ ;\ -4)$ et $\vec{v}(-3\ ;\ 7)$ deux vecteurs. Calculer $\vec{u}.\vec{v}$

$\vec{u}.\vec{v} =$ … … … … … … … … … … … … … … … … … ….

Méthode : Déterminer un angle à l'aide du produit scalaire

Vidéo : mathssa.fr/prodscal3 (9mns5s)



Calculer la mesure de l'angle $\alpha = \left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{CD}\right)$ en lisant les coordonnées des points A, B, C et D dans le repère.

A(-1 ;2)   B(4 ;1)   C(4 ;3)   D(2 ;-1)

… … … … … … … … … … … … … ….

… … … … … … … … … … … … … ….

… … … … … … … … … … … … … ….

… … … … … … … … … … … … … ….

… … … … … … … … … … … … … ….

… … … … … … … … … … … … … ….

… … … … … … … … … … … … … ….

… … … … … … … … … … … … … ….

Revoir les points essentiels