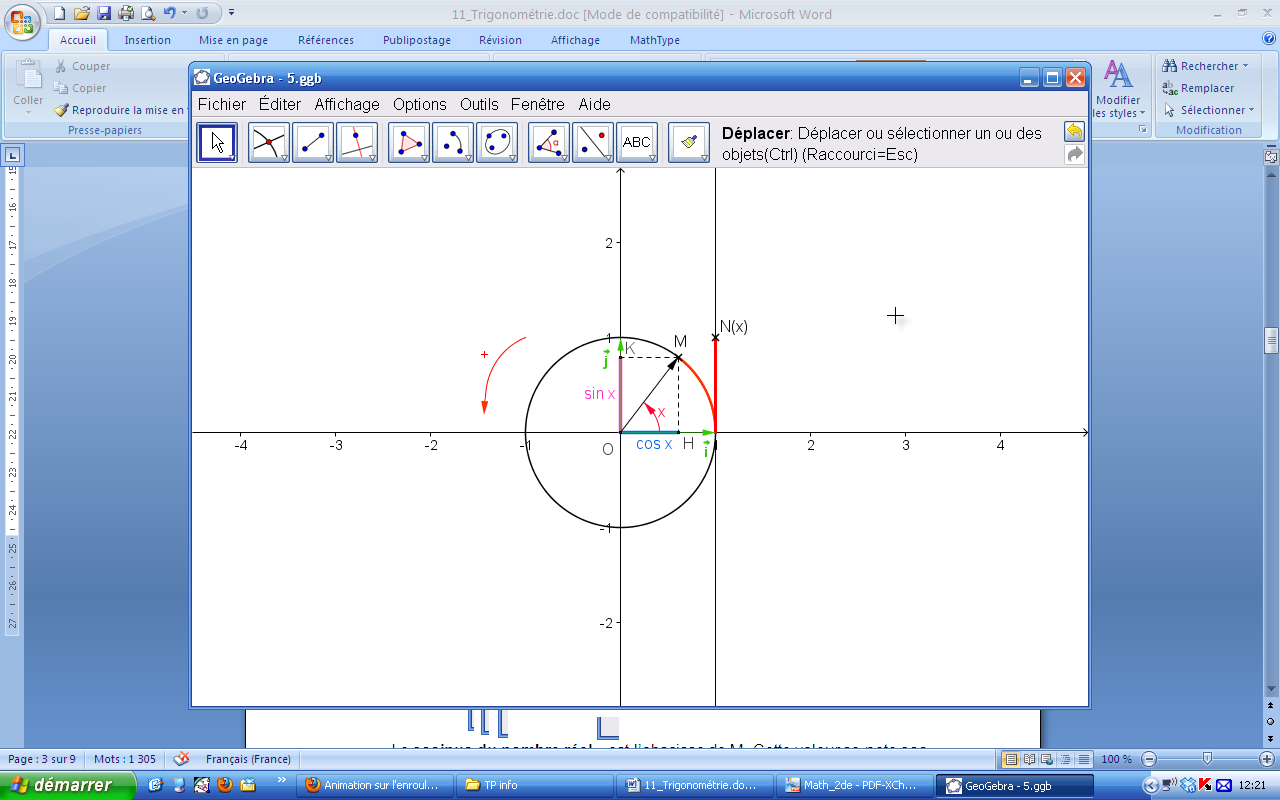
**CHAPITRE 10 –produit scalaire 2ème partie**

La notion de produit scalaire est apparue pour les besoins de la physique. Le concept relativement récent et a été introduit au milieu du XIXe siècle par le mathématicien allemand *Hermann Grassmann* (1809 ; 1877).

Il fut baptisé produit scalaire par *William Hamilton* (1805 ; 1865) en 1853.



**Rappels du chapitre 4 :**

Vidéo : [mathssa.fr/trigo](http://www.mathssa.fr/trigo)  (de mns 45s à 18mns12s)

**Propriétés :**

1. et
2. et

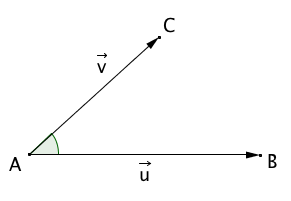
4) où *k* entier relatif

5) où *k* entier relatif

**Valeurs remarquables des fonctions sinus et cosinus :**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | 0 |  |  |  |  |  |
|  | 1 |  |  |  | 0 | -1 |
|  | 0 |  |  |  | 1 | 0 |

**Une 1ère expression du produit scalaire**

Définition : Soit et deux vecteurs du plan.

On appelle **produit scalaire** de par , noté , le

nombre réel défini par :

- , si l'un des deux vecteurs et est nul

- , dans le cas contraire.

se lit " scalaire ".

Remarques :

* Si et sont deux représentants des vecteurs non nuls et alors :

* Si et sont des vecteurs colinéaires de même sens ,

* Si et sont des vecteurs colinéaires de sens contraire ,

**Carré scalaire :**

Définition : Soit un vecteur du plan.

On appelle carré scalaire de le réel : . Ce réel est aussi noté .

=

**I-Propriétés du produit scalaire et applications :**

**1. Propriété de symétrie et de bilinéarité du produit scalaire – identités remarquables**

Vidéo : [mathssa.fr/prodscal](http://www.mathssa.fr/prodscal)  ( 5mns20s à 7mns 20s)

Propriété de symétrie :

Pour tout vecteur et , on a :

Démonstration :

On suppose que et sont non nuls (démonstration évidente dans le cas contraire).

Propriétés de bilinéarité : Pour tous vecteurs, et , on a :

1)

2) , avec *k* un nombre réel.

Preuve : Admis –

Propriétés : Pour tous vecteurs et , on a :

1)

2)

3)

Démonstration pour le 2) :

= =

**2. Une 2ème expression du produit scalaire**

Vidéo : [mathssa.fr/prodscal](http://www.mathssa.fr/prodscal)  (de 7mns20s à 10mns 20s)

Propriété : Soit et deux vecteurs. On a :

Et

Démonstration de la première formule :

Donc

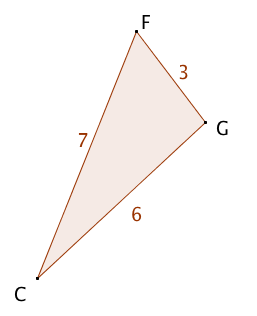
Soit

Et

Propriété : Soit A, B et C trois points du plan. On a :

Démonstration :

+=

Méthode : Calculer un produit scalaire à l’aide des normes

On considère la figure ci-contre, calculer le produit scalaire .

**3. Théorème d'Al Kashi**

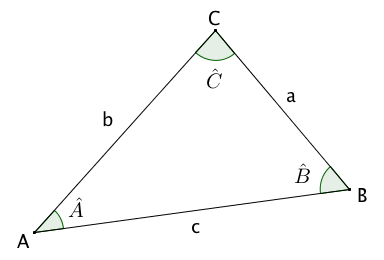
Vidéo : [mathssa.fr/prodscal](http://www.mathssa.fr/prodscal)  (de 10mns20s à 11mns 50s)

A Samarkand, le savant perse *Jemshid ibn Massoud al Kashi* *(1380 ; 1430)* vit sous la protection du prince *Ulugh-Beg* (1394 ; 1449) qui a fondé une Université comprenant une soixantaine de scientifiques qui étudient la théologie et les sciences.

Dans son Traité sur le cercle (1424), *al Kashi* calcule le rapport de la circonférence à son rayon pour obtenir une valeur approchée de *2*π avec une précision jamais atteinte. Il obtient 9 positions exactes en base 60 soit 16 décimales exactes :

*2*π ≈ 6,283 185 307 179 586 5

Théorème : Dans un triangle ABC, on a, avec les notations de la figure :



Démonstration au programme :

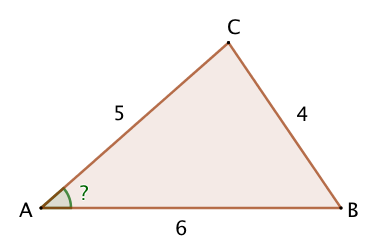
=

=

=

=

Méthode : Appliquer le théorème d’Al Kashi

Video : [mathssa.fr/alkashi](http://www.mathssa.fr/alkashi)  (5mns)

On considère la figure ci-dessous, calculer la mesure de l’angle au degré près.

D’après le théorème d’Al Kashi, on a :

soit soit

**II. Produit scalaire et orthogonalité :**

**1.Vecteurs orthogonaux**

vidéo : [mathssa.fr/prodscal](http://www.mathssa.fr/prodscal)  (de 11mns50s à 16mns30s)

Définition

et sont deux vecteurs de représentants et

et sont orthogonaux signifie que

ou

les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

**Propriété :**

Les vecteurs et sont orthogonaux si et seulement si .

Démonstration :

Si l'un des vecteurs est nul, la démonstration est évidente.

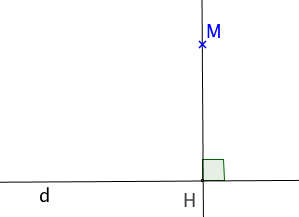
Supposons le contraire.

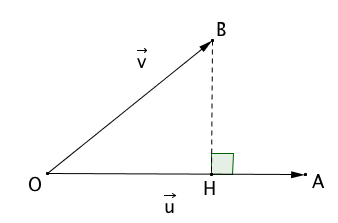
Les vecteurs et sont orthogonaux

**2.Projection orthogonale – 3ème expression du produit scalaire**

Définition : Soit une droite *d* et un point M du plan.

Le **projeté orthogonal** du point M sur la droite *d* est le point d'intersection H de la droite *d* avec la perpendiculaire à *d* passant par M.



Propriété :

Soit et deux vecteurs non nuls

du plan tels que et .

H est le projeté orthogonal du point B sur la

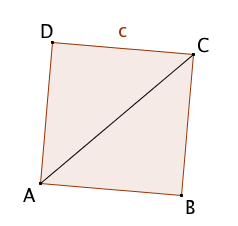
droite (OA).

On a :

Démonstration :

or les vecteurs et sont orthogonaux donc .

Méthode : Calculer un produit scalaire par projection

video :[mathssa.fr/prodscal2](http://www.mathssa.fr/prodscal2) (3mns)

Soit un carré ABCD de côté *c=4*.

Calculer les produits scalaires :

a) b)

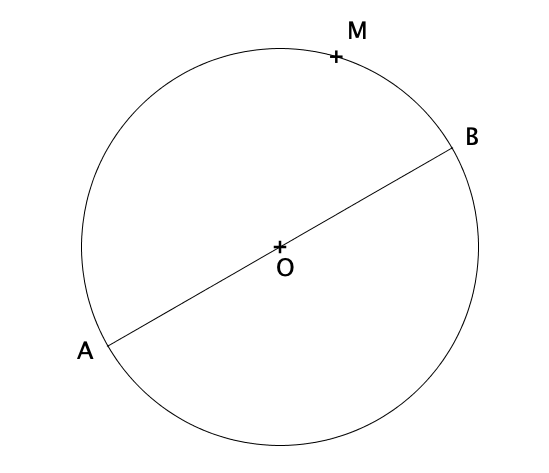
a) Par projection, on a :

b) car les vecteurs sont orthogonaux.

**3.Transformation de l’expression**

Propriété :

L’ensemble des points M vérifiant l’égalité est le cercle de diamètre [AB].

Démonstration au programme : vidéo :[mathssa.fr/prodscal4](http://www.mathssa.fr/prodscal4)

Soit O le milieu du segment [AB].

On a :

Comme O est le milieu de [AB], on a :

Soit :

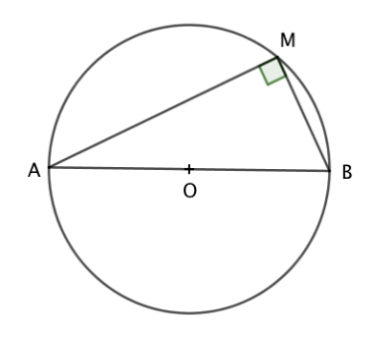
car

.

M appartient donc au cercle de centre O et de rayon OA, c’est-à-dire le cercle de diamètre [AB].

Propriété :

Un point M, distinct de A et B, appartient au cercle de diamètre [AB] si et seulement si le triangle ABM est rectangle en M.



Justification :

si et seulement si les vecteurs et sont orthogonaux.

**4.Produit scalaire dans un repère orthonormé – 4ème expression du produit scalaire**

Vidéo : [mathssa.fr/prodscal](http://www.mathssa.fr/prodscal) (de 16mns 30s à 18mns40s)

Le plan est muni d'un repère orthonormé .

Propriété :

Soit et deux vecteurs de coordonnées respectives et .

On a : .

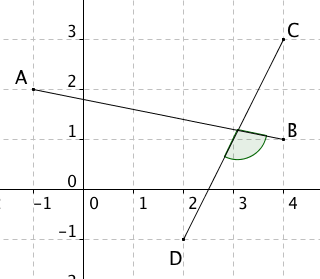
Démonstration :

car , le repère étant normé,

et , le repère étant orthogonal.

Méthode : Calculer un produit scalaire à l’aide des coordonnées

Soit et deux vecteurs. Calculer



Méthode : Déterminer un angle à l'aide du produit scalaire

Vidéo : [mathssa.fr/prodscal3](http://www.mathssa.fr/prodscal3) (9mns5s)

Calculer la mesure de l'angle en lisant les

coordonnées des points A, B, C et D dans le repère.

A(-1 ;2) B(4 ;1) C(4 ;3) D(2 ;-1)

On a :

Or ==

On en déduit que soit

**Revoir les points essentiels**

