

CHAPITRE 10 –produit scalaire 2^{ème} partie

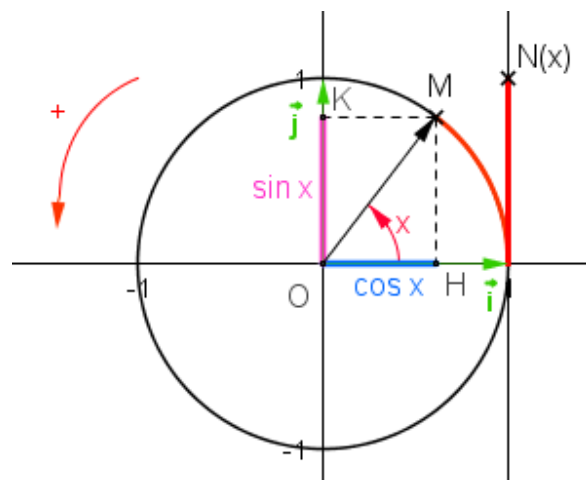
La notion de produit scalaire est apparue pour les besoins de la physique. Le concept relativement récent et a été introduit au milieu du XIX^e siècle par le mathématicien allemand *Hermann Grassmann* (1809 ; 1877). Il fut baptisé produit scalaire par *William Hamilton* (1805 ; 1865) en 1853.

Rappels du chapitre 4 :

Vidéo : mathssa.fr/trigo (de 11mns 45s à 18mns12s)

Propriétés :

- 1) $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ et $-1 \leq \cos(x) \leq 1$
- 2) $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
- 3) $\sin(-x) = -\sin(x)$ et $\cos(-x) = \cos(x)$
- 4) $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$ où k entier relatif
- 5) $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$ où k entier relatif



Valeurs remarquables des fonctions sinus et cosinus :

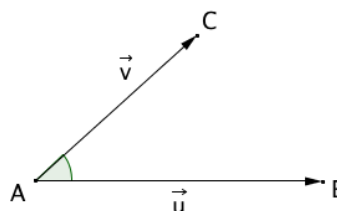
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Une 1^{ère} expression du produit scalaire

Définition : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

On appelle **produit scalaire** de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, le nombre réel défini par :

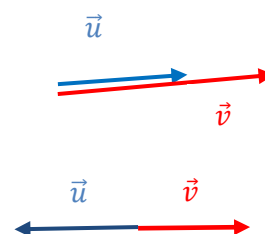
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, si l'un des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v})$, dans le cas contraire.



$\vec{u} \cdot \vec{v}$ se lit " $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ ".

Remarques :

- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux représentants des vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ alors :
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\widehat{BAC})$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs colinéaires de même sens ,
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(0) = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs colinéaires de sens contraire ,
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\pi) = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$



Carré scalaire :

Définition : Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan.

On appelle **carré scalaire** de $\vec{u}$ le réel : $\vec{u} \cdot \vec{u}$. Ce réel est aussi noté $\vec{u}^2$.

Ainsi $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$

I-Propriétés du produit scalaire et applications :

1. Propriété de symétrie et de bilinéarité du produit scalaire – identités remarquables

Vidéo : mathssa.fr/prodscal (5mns20s à 7mns 20s)

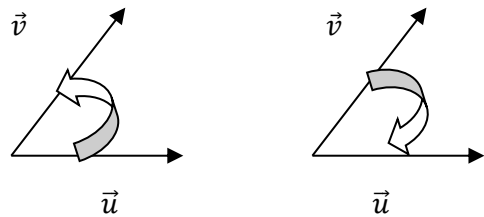
Propriété de symétrie :

Pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

Démonstration :

On suppose que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls (démonstration évidente dans le cas contraire).

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v}) \\ &= \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v}) \\ &= \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(-(\vec{v}; \vec{u})) \\ &= \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\vec{v}; \vec{u}) \\ &= \vec{v} \cdot \vec{u}\end{aligned}$$



Propriétés de bilinéarité : Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a :

- 1) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- 2) $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k \times \vec{u} \cdot \vec{v}$, avec k un nombre réel.

Preuve : Admis –

Propriétés : Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :

- 1) $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$
- 2) $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$
- 3) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

Démonstration pour le 2) :

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

2. Une 2^{ème} expression du produit scalaire

Vidéo : mathssa.fr/prodscal (de 7mns20s à 10mns 20s)

Propriété : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

$$\text{Et } \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

Démonstration de la première formule :

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = (\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

$$\text{Donc } \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

$$\text{Soit } 2\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2$$

$$\text{Et } \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

Propriété : Soit A, B et C trois points du plan. On a :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} (AB^2 + AC^2 - BC^2)$$

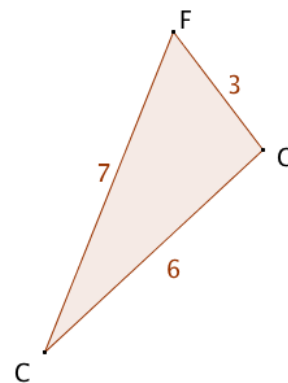
Démonstration :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \frac{1}{2} (\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\|^2) \quad \text{or } \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} \\ &= \frac{1}{2} (AB^2 + AC^2 - \|\overrightarrow{CB}\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (AB^2 + AC^2 - BC^2) \end{aligned}$$

Méthode : Calculer un produit scalaire à l'aide des normes

On considère la figure ci-contre, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{CF}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{CF} &= \frac{1}{2} (CG^2 + CF^2 - FG^2) \\ &= \frac{1}{2} (6^2 + 7^2 - 3^2) \\ &= \frac{1}{2} (36 + 49 - 9) \\ &= 38 \end{aligned}$$



3. Théorème d'Al Kashi

Vidéo : mathssa.fr/prodscal (de 10mns20s à 11mns 50s)



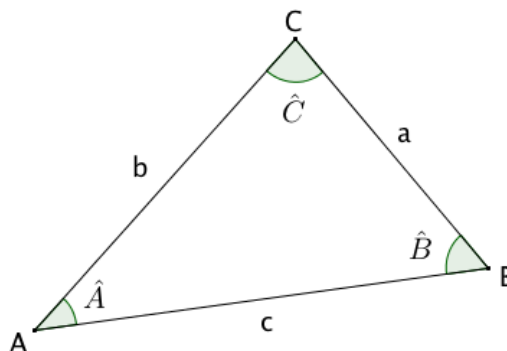
A Samarkand, le savant perse *Jemshid ibn Massoud al Kashi* (1380 ; 1430) vit sous la protection du prince *Ulugh-Beg* (1394 ; 1449) qui a fondé une Université comprenant une soixantaine de scientifiques qui étudient la théologie et les sciences.

Dans son *Traité sur le cercle* (1424), *al Kashi* calcule le rapport de la circonférence à son rayon pour obtenir une valeur approchée de 2π avec une précision jamais atteinte. Il obtient 9 positions exactes en base 60 soit 16 décimales exactes :

$$2\pi \approx 6,283\ 185\ 307\ 179\ 586\ 5$$

Théorème : Dans un triangle ABC, on a, avec les notations de la figure :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$



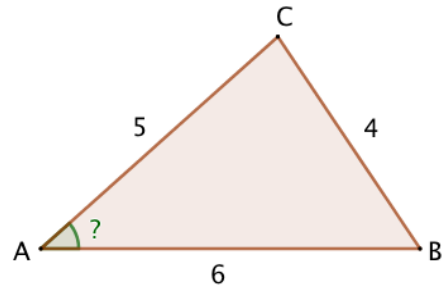
Démonstration au programme :

$$\begin{aligned}
a^2 &= \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 \\
&= \overrightarrow{BA}^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2 \\
&= BA^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + AC^2 \\
&= BA^2 - 2AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + AC^2 \\
&= c^2 - 2cb \cos(\hat{A}) + b^2 \\
&= b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}
\end{aligned}$$

Méthode : Appliquer le théorème d'Al Kashi

Video : mathssa.fr/alkashi (5mns)

On considère la figure ci-dessous, calculer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ au degré près.



D'après le théorème d'Al Kashi, on a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

$$4^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \times 6 \times 5 \times \cos(\widehat{BAC})$$

$$16 = 36 + 25 - 60 \cos(\widehat{BAC})$$

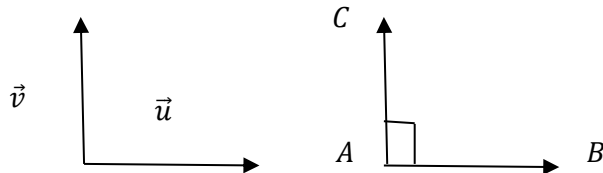
$$60 \cos(\widehat{BAC}) = 36 + 25 - 16$$

$$60 \cos(\widehat{BAC}) = 45$$

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{45}{60} \text{ soit } \cos(\widehat{BAC}) = \frac{3}{4} \text{ soit } \widehat{BAC} \approx 41^\circ$$

II. Produit scalaire et orthogonalité :1. Vecteurs orthogonaux

vidéo : mathssa.fr/prodscal (de 11mns50s à 16mns30s)

Définition

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de représentants $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux signifie que

soit $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$

soit les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

Propriété :

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Démonstration :

Si l'un des vecteurs est nul, la démonstration est évidente.

Supposons le contraire.

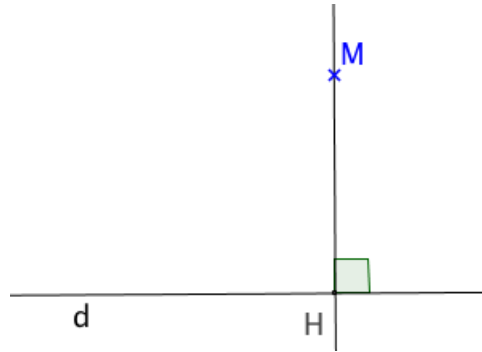
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\Leftrightarrow \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \cos(\vec{u}; \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \text{Les vecteurs } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux}$$

2. Projection orthogonale – 3^{ème} expression du produit scalaire

Définition : Soit une droite d et un point M du plan.

Le **projeté orthogonal** du point M sur la droite d est le point d'intersection H de la droite d avec la perpendiculaire à d passant par M .



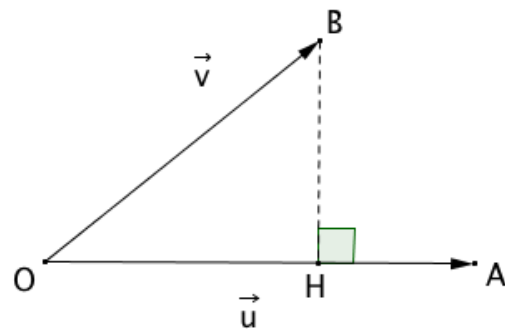
Propriété :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls

du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.

H est le projeté orthogonal du point B sur la droite (OA) .

On a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$



Démonstration :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HB}) \\ &= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{HB} \quad \text{or les vecteurs } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{HB} \text{ sont orthogonaux donc } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{HB} = 0. \\ &= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}\end{aligned}$$

Méthode : Calculer un produit scalaire par projection

video : mathssa.fr/prodscal2 (3mns)

Soit un carré ABCD de côté $c=4$.

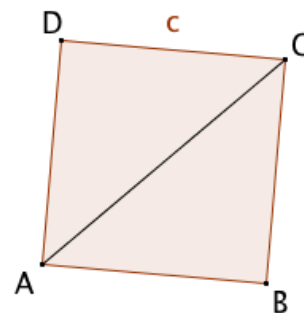
Calculer les produits scalaires :

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

a) Par projection, on a :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = 16$$

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux.



3. Transformation de l'expression $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ **Propriété :**

L'ensemble des points M vérifiant l'égalité $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre [AB].

Démonstration au programme : vidéo : mathssa.fr/prodscal4

Soit O le milieu du segment [AB].

On a :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}) = 0$$

Comme O est le milieu de [AB], on a : $\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA}$

Soit :

$$(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA}) = 0$$

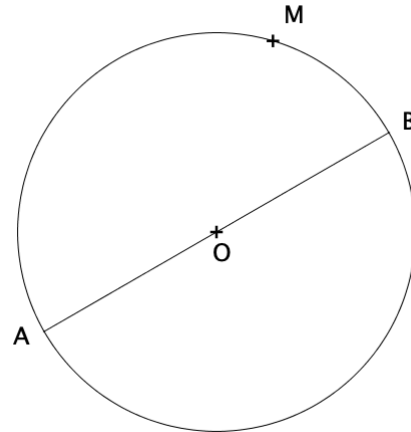
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{OA}^2 = 0 \quad \text{car } (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

$$\Leftrightarrow MO^2 - OA^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow MO^2 = OA^2$$

$$\Leftrightarrow MO = OA.$$

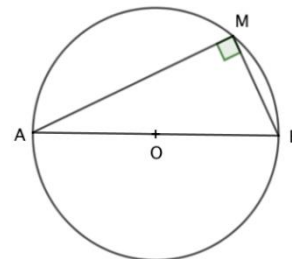
M appartient donc au cercle de centre O et de rayon OA, c'est-à-dire le cercle de diamètre [AB].

**Propriété :**

Un point M, distinct de A et B, appartient au cercle de diamètre [AB] si et seulement si le triangle ABM est rectangle en M.

Justification :

$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux

**4. Produit scalaire dans un repère orthonormé – 4^{ème} expression du produit scalaire**

Vidéo : mathssa.fr/prodscal (de 16mns 30s à 18mns40s)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

Propriété :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives $(x ; y)$ et $(x' ; y')$.

On a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

Démonstration :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j})$$

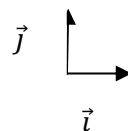
$$= xx'\vec{i} \cdot \vec{i} + xy'\vec{i} \cdot \vec{j} + yx'\vec{j} \cdot \vec{i} + yy'\vec{j} \cdot \vec{j}$$

$$= xx'\|\vec{i}\|^2 + xy'\vec{i} \cdot \vec{j} + yx'\vec{j} \cdot \vec{i} + yy'\|\vec{j}\|^2$$

$$= xx' + yy'$$

car $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$, le repère étant normé,

et $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$, le repère étant orthogonal.



Méthode : Calculer un produit scalaire à l'aide des coordonnées

Soit $\vec{u}(5; -4)$ et $\vec{v}(-3; 7)$ deux vecteurs. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$

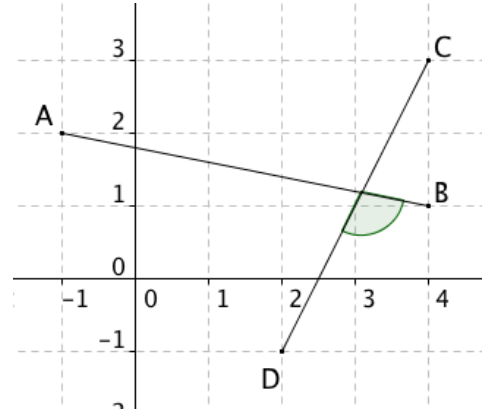
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' = 5 \times (-3) + (-4) \times 7 = -15 - 28 = -43$$

Méthode : Déterminer un angle à l'aide du produit scalaire

Vidéo : mathssa.fr/prodscal3 (9mns5s)

Calculer la mesure de l'angle $\alpha = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD})$ en lisant les coordonnées des points A, B, C et D dans le repère.

A(-1 ;2) B(4 ;1) C(4 ;3) D(2 ;-1)



$$\text{On a : } \overrightarrow{AB}(5; -1) \quad \overrightarrow{CD}(-2; -4) \quad AB = \sqrt{5^2 + (-1)^2} = \sqrt{26} \quad CD = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{20}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 5 \times (-2) + (-1) \times (-4) = -10 + 4 = -6$$

$$\text{Or } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = AB \times CD \times \cos(\alpha) = \sqrt{26} \times \sqrt{20} \times \cos(\alpha) = \sqrt{520} \times \cos(\alpha)$$

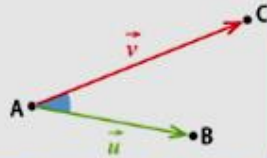
$$\text{On en déduit que } \sqrt{520} \times \cos(\alpha) = -6 \quad \text{soit } \cos(\alpha) = -\frac{6}{\sqrt{520}} = -\frac{6\sqrt{520}}{520} = -\frac{3\sqrt{130}}{130}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{3\sqrt{130}}{130}\right) \approx 105^\circ$$

Revoir les points essentiels

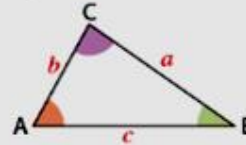
Définition

Soit $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ des vecteurs non nuls. Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, défini par $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{BAC})$.



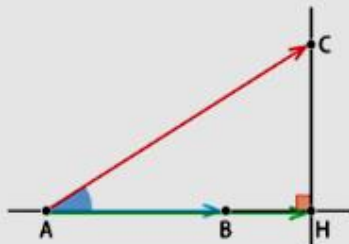
Formule d'Al-Kashi

• Pour tout triangle ABC, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos(\widehat{A})$.

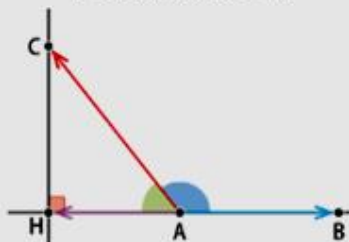


- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si, et seulement si, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- Deux droites (AB) et (CD) sont **perpendiculaires** si, et seulement si, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.
- Le cercle de diamètre [AB] est l'ensemble des points M et tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

Soit trois points A, B et C avec $A \neq B$. On appelle H le **projeté orthogonal** de C sur la droite (AB). Alors : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$



$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ de même sens.



$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ de sens contraires.

Produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

Propriétés

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$:

- **Symétrie** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- **Billinéarité** : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$

Expression analytique

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives $(x; y)$ et $(x'; y')$ dans une **base orthonormée**. On a :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$
- $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$
- $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$