**CHAPITRE 11- la fonction exponentielle**

**Rappels des chapitres 6 et 9**

**Dérivée de la fonction**

|  |
| --- |
| **Propriété :** est une fonction dérivable sur un intervalle J. *a* et *b* sont deux nombres réels. Alors la fonction est dérivable sur l’intervalle pour lequel on a :   |

|  |
| --- |
| **Théorème :**Soit une fonction **dérivable** sur un intervalle I Si pour tout réel *x* de I, alorsest …………… sur I.Si pour tout réel *x* de I alorsest …………….. sur I.Si pour tout réel *x* de I, alors est ……………... sur I. |

**I-Introduction historique :**

Au cours du XVIIe siècle les mathématiciens s'intéressent au problème des [tangentes](https://fr.wikipedia.org/wiki/Tangente_%28g%C3%A9om%C3%A9trie%29) (comment tracer les tangentes à une courbe) et le problème inverse des tangentes (comment, connaissant une propriété sur les tangentes, reconstituer la courbe correspondante).



On appelle **sous-tangente** à la courbe C au point M la longueur PH où H est le projeté orthogonal de M sur l’axe des abscisses et P l’intersection de la tangente avec l’axe des abscisses.

Le mathématicien allemand Leibniz introduisit le calcul intégral en essayant de résoudre le problème suivant : « trouver une courbe dont la sous-tangente soit constante »

*On admet que la courbe C représente une fonction f et le point M a pour abscisse x.*

*La constante est supposée égale à 1.*

=

Chercher une courbe donc la sous- tangente est constante égale à 1 revient à chercher les fonctions *f* vérifiant :

 (équation différentielle)

**Simplification du problème :**On va dans un premier temps , chercher l’existence d’une fonction *f* dérivable sur telle que pour tout réel *x*, et

**II. Définition de la fonction exponentielle – propriétés algébriques:**

**1.Théorème -définition :**

|  |
| --- |
| **Théorème :** Il existe une unique fonction *f* dérivable sur telle que pour tout réel *x*, et  |

**Démonstration de l'unicité:** *L'existence est admise*

**1ère étape : démontrons que *f* ne s'annule pas sur ℝ.**

Soit  la fonction définie sur par

.

 est dérivable sur en tant que produit de fonctions dérivables sur

pour tout réel ,

On en déduit que la fonction  est …………….. sur et donc pour tout réel *x*,

soit .

**Raisonnement par ………………….**

Supposons qu’il existe un réel qui annule la fonction *f.*

On a or

On en conclut que .ABSURDE !On en déduit que la fonction *f* ne s’annule pas sur .

Plus fort encore ,

**2ème étape : montrons l’unicité**

On sait que pour tout réel *x*, et

Supposons qu'il existe une fonction *g* telle que pour tout réel *x*, et

Montrons que pour tout réel *x*, . Comme *f* ne s'annule pas (1ère étape), on pose . est dérivable sur en tant que quotient de fonctions dérivables sur (avec un dénominateur qui ne s’annule pas)

*

 *k* est donc une fonction ………………. sur et donc pour tout réel *x*,

soit soit . L'unicité de *f* est donc vérifiée.

|  |
| --- |
| **Définition :** On appelle **fonction exponentielle** l'unique fonction *f* dérivable sur telle que pour tout réel *x*, et .On note cette fonction **exp**. |

|  |
| --- |
| **Conséquences :**  et pour tout réel *x ,*  |

**Remarque : propriétés découlant de la démonstration**

pour tout réel *x , et*

**2.Relation fonctionnelle**

|  |
| --- |
| **Théorème :** Pour tous réels *x* et *y*, on a :  |

**Remarque :** L’exponentielle transforme une ………………………….. en un …………………………….

**Preuve :**

Soit *y* un réel fixé. On appelle  la fonction définie sur par

 .

 est dérivable sur en tant que quotient de fonctions dérivables sur (avec un dénominateur qui ne

s’annule pas)

On en déduit que la fonction  est ……………………. sur et donc pour tout réel *x*,

soit . On en déduit donc que pour tout réel *x*, .

|  |
| --- |
| **Corollaire :** Pour tous réels *x* et *y*, on a : a) b) c) (*n* entier relatif) |

Démonstration : admis

a) déjà démontré dans la partie I1.

b)

**4.La constante d’Euler – une nouvelle notation :**

|  |
| --- |
| **Définition :**L'image de 1 par la fonction exponentielle est notée *e*. On a ainsi *e* s’appelle la ……………………… |

Remarque : Avec la calculatrice, on peut obtenir une valeur approchée de *e . e≈ 2,718*

Notation nouvelle :

On a vu que

On a envie d’écrire que

|  |
| --- |
| **Notation :**On note pour tout *x* réel, . |

|  |
| --- |
| Capture d’écran 2012-05-20 à 21Comme , le nombre *e* est un nombre irrationnel, c'est à dire qu'il s'écrit avec un nombre infini de décimales sans suite logique. Ses premières décimales sont : *e*  2,7182818284 5904523536 0287471352 6624977572 47093699959574966967 6277240766 3035354759 4571382178 5251664274…Le nombre *e* est également un nombre transcendant. On dit qu’un nombre est transcendant s’il n’est solution d’aucune équation à coefficients entiers.Le nombre  par exemple, est irrationnel mais n’est pas transcendant puisqu’il est solution de l’équation . Un tel nombre est dit «algébrique».Le premier à s’intéresser de façon sérieuse au nombre *e* est le mathématicien suisse *Leonhard Euler* (1707 ; 1783), ci-dessus. C’est à lui que nous devons le nom de ce nombre. Non pas qu’il s’agisse de l’initiale de son nom mais peut être car *e* est la première lettre du mot exponentiel. Dans *« Introductio in Analysin infinitorum »* publié en 1748, *Euler*explique que :  Rappelons que par exemple 5! se lit "factoriel 5" et est égal à 1 x 2 x 3 x 4 x 5. Par cette formule, il obtient une estimation de *e* avec 18 décimales exactes.Nous devons aussi à Euler la démonstration de l’irrationalité de *e*. |

**Conséquences sur les propriétés algébriques :**

Pour tous réels *x* et *y* et pour tout entier relatif *n*, on a

**Application 1:**

**Vidéo** [mathssa.fr/expo1](http://www.mathssa.fr/expo1) (3mns31s)

Simplifier l'écriture des nombres suivants :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  ………….. ………….. ………….. ………….. |  ………….. ………….. ………….. ………….. | C ………….. ………….. ………….. ………….. |

**Application 2:**

Démontrer que pour tout réel ,

Pour tout réel , …………..

 …………..

 …………..

 …………..

**III. Etude de la fonction exponentielle**

**1.Signe et variations de la fonction exponentielle**

**Propriété :**

La fonction exponentielle est **………………………** sur  .

**Preuve :**

En remplaçant , on obtient : soit .

On en déduit que . Or on a vu que l’exponentielle ne s’annule pas.

On en déduit que pour tout réel *x*, .

**Corollaire :**

La fonction exponentielle est **………………………………..** sur  .

**Preuve :** or .

On en déduit que pour tout réel *x*, .

La fonction exponentielle est donc **strictement croissante** sur  .

**Conséquence :** Pour tous réels *a* et *b*, on a :

a)

b)

c)

Méthode : Résoudre une équation ou une inéquation

 **Vidéo** [mathssa.fr/expo2](http://www.mathssa.fr/expo2) (3mns31s)

 **Vidéo** [mathssa.fr/expo3](http://www.mathssa.fr/expo3) (2mns42s)

a) Résoudre dans ℝ l'équation .

b) Résoudre dans ℝ l'inéquation .

|  |  |
| --- | --- |
| a)…………………………………….. …………………………………….. …………………………………….. ……………………………………..…………………………………….. …………………………………….. …………………………………….. …………………………………….. | b) …………………………………….. …………………………………….. …………………………………….. ……………………………………..…………………………………….. …………………………………….. …………………………………….. …………………………………….. |

Méthode : Étudier une fonction exponentielle

**Vidéo** [mathssa.fr/expo4](http://www.mathssa.fr/expo4) (10mns42s)

Soit *f* la fonction définie sur ℝ par .

a) Calculer la dérivée de la fonction *f*.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction *f*.

c) Déterminer une équation de la tangente à Cf au point d’abscisse 0.

 est **dérivable** sur ℝ en tant que produit de fonctions dérivables sur ℝ.

Pour tout réel ,

*
*
* =

b) . Ainsi est du signe de

|  |  |
| --- | --- |
|  | -∞ +∞ |
|  |  |
|  |    |

est décroissante sur et croissante sur .

c)Une équation de la tangente à Cf au point d’abscisse est

On remplace par 0.

**2.Courbe représentative de la fonction exponentielle**



**3.Dérivée de *eax+b*:**

|  |
| --- |
| **Propriété**Soit la fonction définie sur par . est dérivable sur et pour tout réel *x,*  |

**Preuve** est de la forme avec la fonction exponentielle.

Comme est dérivable sur alors l’est aussi et pour tout réel

Exemple : Soit la fonction définie sur par .

 est dérivable sur et pour tout réel *x,*

Si on généralise :

|  |
| --- |
| **Propriété : hors programme***u* est une fonction **dérivable** sur un intervalle I.Alors la fonction *f* définie sur I par est dérivable sur I et pour tout réel *x* de I , on a : . Soit la formule  |

**Exercice : étude d’une fonction exponentielle négative**

Soit la fonction définie sur par  *.*

Déterminer puis étudier son sens de variations

*f* est dérivable sur et pour tout réel ,

 est du signe de ……………….

|  |  |
| --- | --- |
|  | 0 50000 |
|  |   |
|  |  |

 est décroissante sur [0 ;50 000].