

CHAPITRE 11- la fonction exponentielle

Rappels des chapitres 6 et 9

Dérivée de la fonction $x \rightarrow g(ax + b)$

Propriété : g est une fonction dérivable sur un intervalle J . a et b sont deux nombres réels.

Alors la fonction $x \rightarrow g(ax + b)$ est dérivable sur l'intervalle pour lequel $ax + b \in J$ et on a :

$$(g(ax + b))' = \dots \dots \dots$$

Théorème :

Soit f une fonction **dérivable** sur un intervalle I

Si pour tout réel x de I , $f'(x) \geq 0$ alors f est sur I .

Si pour tout réel x de I , $f'(x) \leq 0$ alors f est sur I .

Si pour tout réel x de I , $f'(x) = 0$ alors f est sur I .

I-Introduction historique :

Au cours du XVII^e siècle les mathématiciens s'intéressent au problème des tangentes (comment tracer les tangentes à une courbe) et le problème inverse des tangentes (comment, connaissant une propriété sur les tangentes, reconstituer la courbe correspondante).

On appelle **sous-tangente** à la courbe C au point M la longueur PH où H est le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses et P l'intersection de la tangente avec l'axe des abscisses.

Le mathématicien allemand Leibniz introduisit le calcul intégral en essayant de résoudre le problème suivant : « trouver une courbe dont la sous-tangente soit constante »

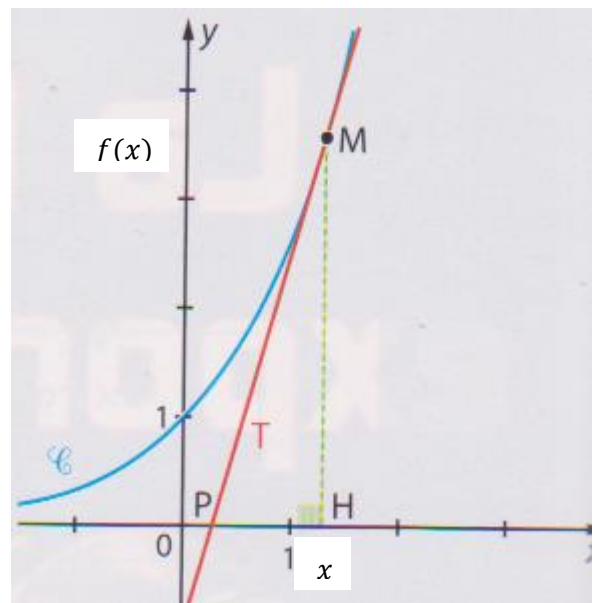
On admet que la courbe C représente une fonction f et le point M a pour abscisse x .

La constante est supposée égale à 1.

$$f'(x) = \frac{MH}{PH} = \frac{f(x)}{1}$$

Chercher une courbe dont la sous-tangente est constante égale à 1 revient à chercher les fonctions f vérifiant :

$$f'(x) = f(x) \quad (\text{équation différentielle})$$



Simplification du problème : On va dans un premier temps, chercher l'existence d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x , $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$.

II. Définition de la fonction exponentielle – propriétés algébriques:

1. Théorème -définition :

Théorème :

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x , et

Démonstration de l'unicité: L'existence est admise**1^{ère} étape : démontrons que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.**

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x)f(-x)$

$$g(0) = f(0)f(0) = 1.$$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

pour tout réel ,

- $g = uv$
- $u(x) = f(x) \quad u'(x) = f'(x)$
 $v(x) = f(-x) \quad v'(x) = \dots\dots\dots$
- $g = \dots\dots\dots$
 $g'(x) = \dots\dots\dots$
 $= \dots\dots\dots$
 $= \dots\dots\dots$
 $= \dots$

On en déduit que la fonction g est sur $\mathbb{R}$ et donc pour tout réel x , $g(x) = g(\dots)$
 soit $f(x)f(-x) = 1$.

Raisonnement par

Supposons qu'il existe un réel x_0 qui annule la fonction f .

$$\text{On a } f(x_0)f(-x_0) = 1 \quad \text{or } f(x_0) = 0$$

On en conclut que ABSURDE ! On en déduit que la fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

$$\text{Plus fort encore, } f(-x) = \frac{1}{f(x)}$$

2^{ème} étape : montrons l'unicité

On sait que pour tout réel x , $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$.

Supposons qu'il existe une fonction g telle que pour tout réel x , $g'(x) = g(x)$ et $g(0) = 1$.

Montrons que pour tout réel x , $g(x) = f(x)$. Comme f ne s'annule pas (1^{ère} étape), on pose $k(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$

$k(0) = 1$ k est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (avec un dénominateur qui ne s'annule pas)

- $k = \frac{u}{v}$
- $u(x) = g(x) \quad u'(x) = g'(x) = \dots$
 $v(x) = f(x) \quad v'(x) = f'(x) = \dots$
- $h' = \dots\dots\dots$
 $h'(x) = \dots\dots\dots$

k est donc une fonction sur $\mathbb{R}$ et donc pour tout réel x , $k(x) = k(\dots)$
 soit $\frac{g(x)}{f(x)} = \dots$ soit $g(x) = f(x)$. L'unicité de f est donc vérifiée.

Définition :

On appelle **fonction exponentielle** l'unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x ,
 et On note cette fonction **exp**.

Conséquences :

..... et pour tout réel x ,

Remarque : propriétés découlant de la démonstration

pour tout réel x , $\exp(x) \neq 0$ et $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$

2.Relation fonctionnelle**Théorème :**

Pour tous réels x et y , on a : $\exp(x + y) = \dots\dots\dots$

Remarque : L'exponentielle transforme une $\dots\dots\dots$ en un $\dots\dots\dots$

Preuve :

Soit y un réel fixé. On appelle h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{\exp(x+y)}{\exp(x)}$.

$$h(0) = \frac{\exp(0+y)}{\exp(0)} = \frac{\exp(y)}{1} = \exp(y).$$

h est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (avec un dénominateur qui ne s'annule pas)

- $h = \frac{u}{v}$
- $u(x) = \exp(x + y) \quad u'(x) = \dots\dots\dots$
 $v(x) = \exp(x) \quad v'(x) = \dots\dots\dots$
- $h' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$h'(x) = \dots\dots\dots$$

On en déduit que la fonction h est $\dots\dots\dots$ sur $\mathbb{R}$ et donc pour tout réel x , $h(x) = h(\dots)$

soit $\frac{\exp(x+y)}{\exp(x)} = \dots\dots\dots$ On en déduit donc que pour tout réel x , $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$.

Corollaire : Pour tous réels x et y , on a :

- a) $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$
- b) $\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$
- c) $\exp(nx) = (\exp(x))^n$ (n entier relatif)

Démonstration : admis

a) déjà démontré dans la partie I1.

$$b) \exp(x - y) = \exp(x + (-y)) = \exp(x) \times \exp(-y) = \exp(x) \times \frac{1}{\exp(y)} = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$$

4.La constante d'Euler – une nouvelle notation :**Définition :**

L'image de 1 par la fonction exponentielle est notée e . On a ainsi $e = \exp(1)$
 e s'appelle la $\dots\dots\dots$

Remarque : Avec la calculatrice, on peut obtenir une valeur approchée de e . $e \approx 2,718$

Notation nouvelle :

On a vu que

$$\exp(nx) = (\exp(x))^n$$



On a envie d'écrire que

$$\exp(x \times 1) = (\exp(\dots))^{\dots} = \dots^{\dots}$$

Notation :

On note pour tout x réel, $\exp(x) = \dots$



Comme π , le nombre e est un nombre irrationnel, c'est à dire qu'il s'écrit avec un nombre infini de décimales sans suite logique.

Ses premières décimales sont :

$e \approx 2,7182818284\ 5904523536\ 0287471352\ 6624977572\ 4709369995\ 9574966967\ 6277240766\ 3035354759\ 4571382178\ 5251664274\dots$

Le nombre e est également un nombre transcendant. On dit qu'un nombre est transcendant s'il n'est solution d'aucune équation à coefficients entiers.

Le nombre $\sqrt{2}$ par exemple, est irrationnel mais n'est pas transcendant puisqu'il est solution de l'équation $x^2 = 2$. Un tel nombre est dit «algébrique».

Le premier à s'intéresser de façon sérieuse au nombre e est le mathématicien suisse *Leonhard Euler* (1707 ; 1783), ci-dessus. C'est à lui que nous devons le nom de ce nombre. Non pas qu'il s'agisse de l'initiale de son nom mais peut être car e est la première lettre du mot exponentiel.

Dans « *Introductio in Analysis infinitorum* » publié en 1748, *Euler* explique que :

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

Rappelons que par exemple $5!$ se lit "factoriel 5" et est égal à $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$. Par cette formule, il obtient une estimation de e avec 18 décimales exactes.

Nous devons aussi à Euler la démonstration de l'irrationalité de e .

Conséquences sur les propriétés algébriques :

Pour tous réels x et y et pour tout entier relatif n , on a

$$e^{x+y} = \dots$$

$$e^{-x} = \dots$$

$$e^{x-y} = \dots$$

$$e^{nx} = \dots$$

Application 1:

Vidéo mathssa.fr/expo1 (3mns31s)

Simplifier l'écriture des nombres suivants :

$A = \dots$	$B = \dots$	$C = \dots$
$= \dots$	$= \dots$	$= \dots$
$= \dots$	$= \dots$	$= \dots$
$= \dots$	$= \dots$	

		=Tapez une équation ici.
--	--	-----------------------------------

Application 2:

Démontrer que pour tout réel x , $\frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x+1}$

Pour tout x réel ,

=

=

=

III. Etude de la fonction exponentielle**1. Signe et variations de la fonction exponentielle****Propriété :**

La fonction exponentielle est sur $\mathbb{R}$.

Preuve : pour tout réel x , $e^{2x} = (e^x)^2$

En remplaçant x par $\frac{x}{2}$, on obtient : $e^{2 \cdot \frac{x}{2}} = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2$ soit $e^x = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2$.

On en déduit que $e^x \geq 0$. Or on a vu que l'exponentielle ne s'annule pas.

On en déduit que pour tout réel x , $e^x > 0$.

Corollaire :

La fonction exponentielle est sur $\mathbb{R}$.

Preuve : pour tout réel x , $\exp'(x) = e^x$ or $e^x > 0$.

On en déduit que pour tout réel x , $\exp'(x) > 0$.

La fonction exponentielle est donc **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

Conséquence : Pour tous réels a et b , on a :

a) $e^a = e^b \Leftrightarrow \dots\dots\dots$

b) $e^a < e^b \Leftrightarrow \dots\dots\dots$

c) $e^a > e^b \Leftrightarrow \dots\dots\dots$

Méthode : Résoudre une équation ou une inéquation

Vidéo mathssa.fr/expo2 (3mns31s)

Vidéo mathssa.fr/expo3 (2mns42s)

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{x^2-3} - e^{-2x} = 0$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{4x-1} \geq 1$.

a)	b)
--	--

Méthode : Étudier une fonction exponentielle

Vidéo mathssa.fr/expo4 (10mns42s)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x + 1)e^x$.

a) Calculer la dérivée de la fonction f .

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f .

c) Déterminer une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0.

a) f est **dérivable** sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x ,

- $f = \dots$
- $\dots$
- $f' = \dots$

$$f'(x) = \dots$$

b) $\dots$. Ainsi $f'(x)$ est du signe de $\dots$

$\dots$

x	$-\infty$		$+\infty$
-----	-----------	--	-----------

$f'(x)$	
$f(x)$	

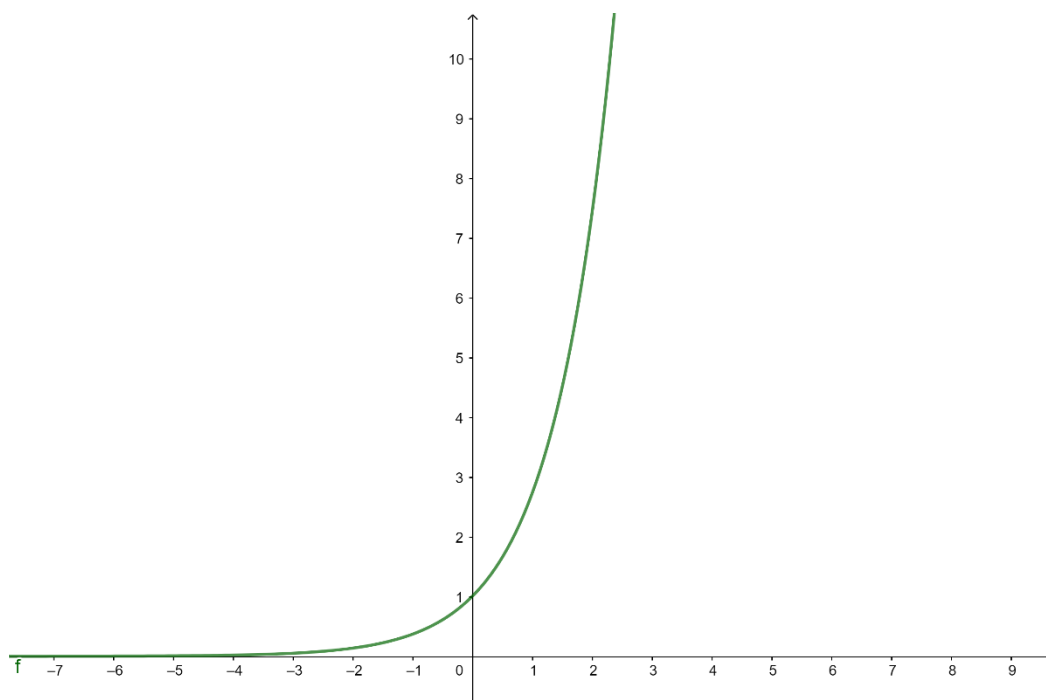
f est décroissante sur $] -\infty ; -2]$ et croissante sur $[-2 ; +\infty[$ $f(-2) = (-2 + 1)e^{-2} = -e^{-2} = -\frac{1}{e^2}$.

c) Une équation de la tangente à Cf au point d'abscisse a est $y = \dots\dots\dots$

On remplace a par 0.

$y = \dots\dots\dots$

2. Courbe représentative de la fonction exponentielle



3. Dérivée de e^{ax+b} :

Propriété

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{ax+b}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , $f'(x) = \dots\dots\dots$

Preuve : $f(x)$ est de la forme $g(ax + b)$ avec g la fonction exponentielle.

Comme g est dérivable sur $\mathbb{R}$ alors f l'est aussi et pour tout réel x ,

$$f'(x) = a \times g'(ax + b) = a \times \exp'(ax + b) = a \times e^{ax+b}$$

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{3x-5}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , $f'(x) = \dots\dots\dots$

Si on généralise : $(e^{ax+b})' = (ax + b)'e^{ax+b}$ $(e^u)' = u'e^u$

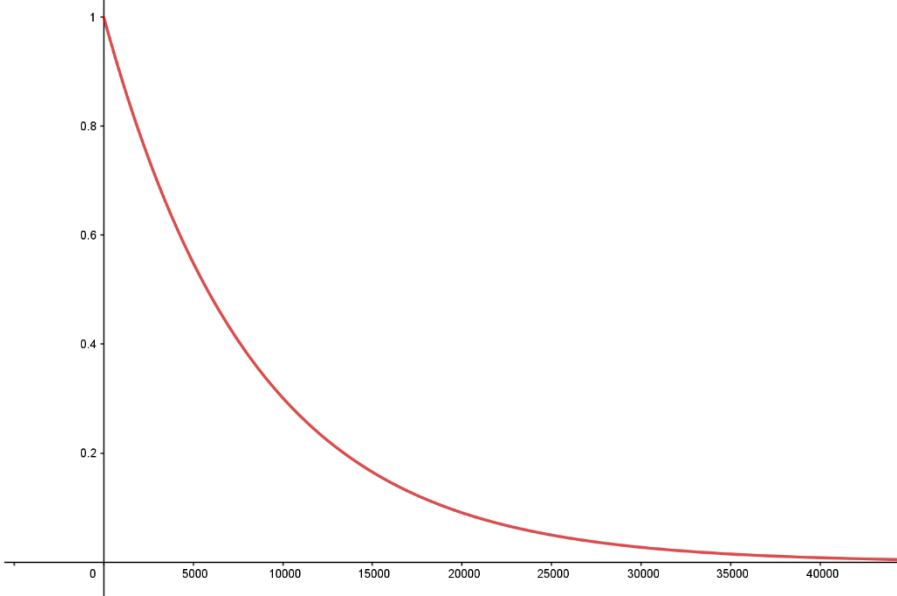
Propriété : hors programme

u est une fonction **dérivable** sur un intervalle I .

Alors la fonction f définie sur I par $e^{u(x)}$ est dérivable sur I et pour tout réel x de I , on a : $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$. Soit la formule $(e^u)' = u'e^u$

Exercice : étude d'une fonction exponentielle négative

Soit f la fonction définie sur $[0 ; 50\,000]$ par $f(x) = e^{-0,00012x}$.



Déterminer $f'(x)$ puis étudier son sens de variations

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , $f'(x) = \dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots f'(x)$ est du signe de $\dots\dots\dots$

x	0	50000
$f'(x)$		
$f(x)$		

f est décroissante sur $[0 ; 50\,000]$.

$$f(0) = e^{-0,00012 \times 0} = e^0 = 1$$

$$f(50000) = e^{-0,00012 \times 50\,000} = e^{-6}$$