**CHAPITRE 11- la fonction exponentielle**

**Rappels des chapitres 6 et 9**

**Dérivée de la fonction**

|  |
| --- |
| **Propriété :** est une fonction dérivable sur un intervalle J. *a* et *b* sont deux nombres réels. Alors la fonction est dérivable sur l’intervalle pour lequel on a :   |

|  |
| --- |
| **Théorème :**Soit une fonction **dérivable** sur un intervalle I Si pour tout réel *x* de I, alorsest croissante sur I.Si pour tout réel *x* de I alorsest décroissante sur I.Si pour tout réel *x* de I, alors est constante sur I. |

**I-Introduction historique :**

Au cours du XVIIe siècle les mathématiciens s'intéressent au problème des [tangentes](https://fr.wikipedia.org/wiki/Tangente_%28g%C3%A9om%C3%A9trie%29) (comment tracer les tangentes à une courbe) et le problème inverse des tangentes (comment, connaissant une propriété sur les tangentes, reconstituer la courbe correspondante).



On appelle **sous-tangente** à la courbe C au point M la longueur PH où H est le projeté orthogonal de M sur l’axe des abscisses et P l’intersection de la tangente avec l’axe des abscisses.

Le mathématicien allemand Leibniz introduisit le calcul intégral en essayant de résoudre le problème suivant : « trouver une courbe dont la sous-tangente soit constante »

*On admet que la courbe C représente une fonction f et le point M a pour abscisse x.*

*La constante est supposée égale à 1.*

=

Chercher une courbe donc la sous- tangente est constante égale à 1 revient à chercher les fonctions *f* vérifiant :

 (équation différentielle)

**Simplification du problème :**On va dans un premier temps , chercher l’existence d’une fonction *f* dérivable sur telle que pour tout réel *x*, et

**II. Définition de la fonction exponentielle – propriétés algébriques:**

**1.Théorème -définition :**

|  |
| --- |
| **Théorème :** Il existe une unique fonction *f* dérivable sur telle que pour tout réel *x*, et  |

**Démonstration de l'unicité:** *L'existence est admise*

**1ère étape : démontrons que *f* ne s'annule pas sur ℝ.**

Soit  la fonction définie sur par

.

 est dérivable sur en tant que produit de fonctions dérivables sur

pour tout réel ,

On en déduit que la fonction  est constante sur et donc pour tout réel *x*,

soit .

**Raisonnement par l’absurde.**

Supposons qu’il existe un réel qui annule la fonction *f.*

On a or

On en conclut que .ABSURDE !On en déduit que la fonction *f* ne s’annule pas sur .

Plus fort encore ,

**2ème étape : montrons l’unicité**

On sait que pour tout réel *x*, et

Supposons qu'il existe une fonction *g* telle que pour tout réel *x*, et

Montrons que pour tout réel *x*, . Comme *f* ne s'annule pas (1ère étape), on pose . est dérivable sur en tant que quotient de fonctions dérivables sur (avec un dénominateur qui ne s’annule pas)

*

 *k* est donc une fonction constante sur et donc pour tout réel *x*,

soit soit . L'unicité de *f* est donc vérifiée.

|  |
| --- |
| **Définition :** On appelle **fonction exponentielle** l'unique fonction *f* dérivable sur telle que pour tout réel *x*, et .On note cette fonction **exp**. |

|  |
| --- |
| **Conséquences :**  et pour tout réel *x ,*  |

**Remarque : propriétés découlant de la démonstration**

pour tout réel *x , et*

**2.Relation fonctionnelle**

|  |
| --- |
| **Théorème :** Pour tous réels *x* et *y*, on a :  |

**Remarque :** L’exponentielle transforme une somme en un produit

**Preuve :**

Soit *y* un réel fixé. On appelle  la fonction définie sur par

 .

 est dérivable sur en tant que quotient de fonctions dérivables sur (avec un dénominateur qui ne

s’annule pas)

 =0

On en déduit que la fonction  est constante sur et donc pour tout réel *x*,

soit . On en déduit donc que pour tout réel *x*, .

|  |
| --- |
| **Corollaire :** Pour tous réels *x* et *y*, on a : a) b) c) (*n* entier relatif) |

Démonstration : admis

a) déjà démontré dans la partie I1.

b)

**3.La constante d’Euler – une nouvelle notation :**

|  |
| --- |
| **Définition :**L'image de 1 par la fonction exponentielle est notée *e*. On a ainsi *e* s’appelle la constante d’Euler. |

Remarque : Avec la calculatrice, on peut obtenir une valeur approchée de *e . e≈ 2,718*

Notation nouvelle :

On a vu que

On a envie d’écrire que

|  |
| --- |
| **Notation :**On note pour tout *x* réel, . |

|  |
| --- |
| Capture d’écran 2012-05-20 à 21Comme , le nombre *e* est un nombre irrationnel, c'est à dire qu'il s'écrit avec un nombre infini de décimales sans suite logique. Ses premières décimales sont : *e*  2,7182818284 5904523536 0287471352 6624977572 47093699959574966967 6277240766 3035354759 4571382178 5251664274…Le nombre *e* est également un nombre transcendant. On dit qu’un nombre est transcendant s’il n’est solution d’aucune équation à coefficients entiers.Le nombre  par exemple, est irrationnel mais n’est pas transcendant puisqu’il est solution de l’équation . Un tel nombre est dit «algébrique».Le premier à s’intéresser de façon sérieuse au nombre *e* est le mathématicien suisse *Leonhard Euler* (1707 ; 1783), ci-dessus. C’est à lui que nous devons le nom de ce nombre. Non pas qu’il s’agisse de l’initiale de son nom mais peut être car *e* est la première lettre du mot exponentiel. Dans *« Introductio in Analysin infinitorum »* publié en 1748, *Euler*explique que :  Rappelons que par exemple 5! se lit "factoriel 5" et est égal à 1 x 2 x 3 x 4 x 5. Par cette formule, il obtient une estimation de *e* avec 18 décimales exactes.Nous devons aussi à Euler la démonstration de l’irrationalité de *e*. |

**Conséquences sur les propriétés algébriques :**

Pour tous réels *x* et *y* et pour tout entier relatif *n*, on a

**Application 1:**

**Vidéo** [mathssa.fr/expo1](http://www.mathssa.fr/expo1) (3mns31s)

Simplifier l'écriture des nombres suivants :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|   =   |      | C  = =   |

**Application 2:**

Démontrer que pour tout réel ,

Pour tout réel ,

**III. Etude de la fonction exponentielle**

**1.Signe et variations de la fonction exponentielle**

**Propriété :**

La fonction exponentielle est **strictement positive** sur  .

**Preuve :**

En remplaçant , on obtient : soit .

On en déduit que . Or on a vu que l’exponentielle ne s’annule pas.

On en déduit que pour tout réel *x*, .

**Corollaire :**

La fonction exponentielle est **strictement croissante** sur  .

**Preuve :** or .

On en déduit que pour tout réel *x*, .

La fonction exponentielle est donc **strictement croissante** sur  .

**Conséquence :** Pour tous réels *a* et *b*, on a :

a)

b)

c)

Méthode : Résoudre une équation ou une inéquation

 **Vidéo** [mathssa.fr/expo2](http://www.mathssa.fr/expo2) (3mns31s)

 **Vidéo** [mathssa.fr/expo3](http://www.mathssa.fr/expo3) (2mns42s)

a) Résoudre dans ℝ l'équation .

b) Résoudre dans ℝ l'inéquation .

|  |  |
| --- | --- |
| a)     On calcule le discriminant  L’équation admet donc deux solutions :S={-3 ;1} | b)     S= |

Méthode : Étudier une fonction exponentielle

**Vidéo** [mathssa.fr/expo4](http://www.mathssa.fr/expo4) (10mns42s)

Soit *f* la fonction définie sur ℝ par .

a) Calculer la dérivée de la fonction *f*.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction *f*.

c) Déterminer une équation de la tangente à Cf au point d’abscisse 0.

 est **dérivable** sur ℝ en tant que produit de fonctions dérivables sur ℝ.

Pour tout réel ,

* =
*

* =

b) . Ainsi est du signe de

|  |  |
| --- | --- |
|  | -∞ -2 +∞ |
|  | * 0 +
 |
|  |   |

est décroissante sur et croissante sur .

c)Une équation de la tangente à Cf au point d’abscisse est

On remplace par 0.

 or  et

**2.Courbe représentative de la fonction exponentielle**



**3.Dérivée de *eax+b*:**

|  |
| --- |
| **Propriété**Soit la fonction définie sur par . est dérivable sur et pour tout réel *x,*  |

**Preuve** est de la forme avec la fonction exponentielle.

Comme est dérivable sur alors l’est aussi et pour tout réel

Exemple : Soit la fonction définie sur par .

 est dérivable sur et pour tout réel *x,*

Si on généralise :

|  |
| --- |
| **Propriété : hors programme***u* est une fonction **dérivable** sur un intervalle I.Alors la fonction *f* définie sur I par est dérivable sur I et pour tout réel *x* de I , on a : . Soit la formule  |

**Exercice : étude d’une fonction exponentielle négative**

Soit la fonction définie sur par  *.*

Déterminer puis étudier son sens de variations

*f* est dérivable sur et pour tout réel ,

 est du signe de -0,00012.

|  |  |
| --- | --- |
|  | 0 50000 |
|  |  - |
|  | 1  |

 est décroissante sur [0 ;50 000].