CHAPITRE 11- la fonction exponentielle

Rappels des chapitres 6 et 9

Dérivée de la fonction $x \to g(ax+b)$

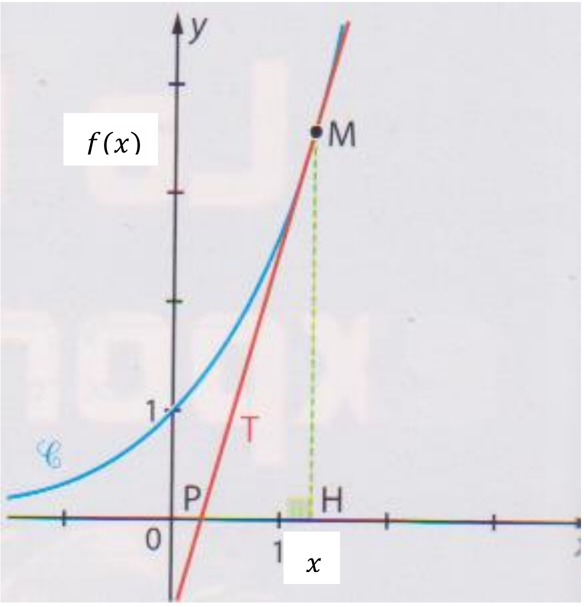
Propriété : g est une fonction dérivable sur un intervalle J. a et b sont deux nombres réels.
Alors la fonction $x \to \boldsymbol{g(ax+b)}$ est dérivable sur l'intervalle pour lequel $ax+b \in J$ *et* on a :
$(g(ax+b))' = ag'(ax+b)$

Théorème :
Soit f une fonction **dérivable** sur un intervalle I
Si pour tout réel x de I, $f'(x) \geq 0$ alors f est croissante sur I.
Si pour tout réel x de I , $f'(x) \leq 0$ alors f est décroissante sur I.
Si pour tout réel x de I, $f'(x) = 0$ alors f est constante sur I.

I-Introduction historique :

Au cours du XVII[e] siècle les mathématiciens s'intéressent au problème des tangentes (comment tracer les tangentes à une courbe) et le problème inverse des tangentes (comment, connaissant une propriété sur les tangentes, reconstituer la courbe correspondante).

On appelle **sous-tangente** à la courbe C au point M la longueur PH où H est le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses et P l'intersection de la tangente avec l'axe des abscisses.



Le mathématicien allemand Leibniz introduisit le calcul intégral en essayant de résoudre le problème suivant : « trouver une courbe dont la sous-tangente soit constante »

On admet que la courbe C représente une fonction f et le point M a pour abscisse x.
La constante est supposée égale à 1.

$f'(x) = \frac{MH}{PH} = \frac{f(x)}{1}$

Chercher une courbe donc la sous- tangente est constante égale à 1 revient à chercher les fonctions f vérifiant :

$f'(x) = f(x)$ (équation différentielle)

Simplification du problème : On va dans un premier temps , chercher l'existence d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x, $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$.

II. Définition de la fonction exponentielle – propriétés algébriques:

1.Théorème -définition :

Théorème :
Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x, $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$.

Démonstration de l'unicité: *L'existence est admise*

1ère étape : démontrons que *f* ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x)f(-x)$

$g(0) = f(0)f(0) = 1$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

pour tout réel ,

- $g = uv$
- $u(x) = f(x) \quad u'(x) = f'(x)$
  $v(x) = f(-x) \quad v'(x) = -f'(-x)$
- $g = u'v + uv'$
  $g'(x) = f'(x)f(-x) + f(x)(f(-x))'$
  $= f'(x)f(-x) + f(x)(-f'(-x))$
  $= f(x)f(-x) - f(x)f(-x)$
  $= 0$

On en déduit que la fonction g est constante sur $\mathbb{R}$ et donc pour tout réel *x*, $g(x) = g(0)$

soit $f(x)f(-x) = 1$.

Raisonnement par l'absurde.

Supposons qu'il existe un réel x_0 qui annule la fonction *f*.

On a $f(x_0)f(-x_0) = 1$ or $f(x_0) = 0$

On en conclut que $0 = 1$.ABSURDE !On en déduit que la fonction *f* ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Plus fort encore , $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$

2ème étape : montrons l'unicité

On sait que pour tout réel *x*, $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$.

Supposons qu'il existe une fonction *g* telle que pour tout réel *x*, $g'(x) = g(x)$ et $g(0) = 1$.

Montrons que pour tout réel *x*, $g(x) = f(x)$. Comme *f* ne s'annule pas (1ère étape), on pose $k(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$

.$k(0) = 1$ k est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (avec un dénominateur qui ne s'annule pas)

- $k = \frac{u}{v}$
- $u(x) = g(x) \quad u'(x) = g'(x) = g(x)$
  $v(x) = f(x) \quad v'(x) = f'(x) = f(x)$
- $h' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

$h'(x) = \frac{g'(x)f(x)-g(x)f'(x)}{f^2(x)} \quad = \frac{g(x)f(x)-g(x)f(x)}{f^2(x)} \quad = \frac{0}{f^2(x)} \quad = 0$

k est donc une fonction constante sur $\mathbb{R}$ et donc pour tout réel *x*, $k(x) = k(0)$

soit $\frac{g(x)}{f(x)} = 1$ soit $g(x) = f(x)$. L'unicité de *f* est donc vérifiée.

<u>Définition :</u>

On appelle **<u>fonction exponentielle</u>** l'unique fonction *f* dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel *x*, $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$.On note cette fonction **exp**.

<u>Conséquences :</u>

$\exp(0) = 1$ et pour tout réel *x* , $exp'(x) = exp(x)$

Remarque : propriétés découlant de la démonstration

pour tout réel x , $exp(x) \neq 0$ *et* $exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$

2.Relation fonctionnelle

Théorème :

Pour tous réels x et y, on a : $exp(x+y) = exp(x) \times exp(y)$

Remarque : L'exponentielle transforme une somme en un produit

Preuve :

Soit y un réel fixé. On appelle h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{exp(x+y)}{exp(x)}$.

$h(0) = \frac{exp(0+y)}{exp(0)} = \frac{exp(y)}{1} = exp(y)$.

h est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (avec un dénominateur qui ne s'annule pas)

- $h = \frac{u}{v}$
- $u(x) = \exp(x+y)$ $\quad u'(x) = 1exp'(x+y) = \exp(x+y)$
  $v(x) = \exp(x)$ $\quad v'(x) = exp'(x) = \exp(x)$
- $h' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$h'(x) = \frac{exp(x+y)exp(x) - exp(x+y)exp(x)}{f^2(x)} \qquad = \frac{0}{exp^2(x)}$ =0

On en déduit que la fonction h est constante sur $\mathbb{R}$ et donc pour tout réel x, $h(x) = h(0)$

soit $\frac{exp(x+y)}{exp(x)} = exp(y)$. On en déduit donc que pour tout réel x, $exp(x+y) = exp(x) \times exp(y)$.

Corollaire : Pour tous réels x et y, on a :

a) $exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$

b) $exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$

c) $exp(nx) = (\exp(x))^n$ (n entier relatif)

Démonstration : admis

a) déjà démontré dans la partie I1.

b) $exp(x-y) = \exp(x+(-y)) = \exp(x) \times \exp(-y) = \exp(x) \times \frac{1}{\exp(y)} = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$

3.La constante d'Euler – une nouvelle notation :

Définition :

L'image de 1 par la fonction exponentielle est notée e. On a ainsi $e = exp(1)$

e s'appelle la constante d'Euler.

Remarque : Avec la calculatrice, on peut obtenir une valeur approchée de e . $e \approx 2{,}718$

Notation nouvelle :

On a vu que $exp(nx) = (\exp(x))^n$

On a envie d'écrire que $exp(x \times 1) = (\exp(1))^n \ = e^n$

Notation :

On note pour tout x réel, $exp(x) = e^x$.

Comme π, le nombre *e* est un nombre irrationnel, c'est à dire qu'il s'écrit avec un nombre infini de décimales sans suite logique.
Ses premières décimales sont :

$e \approx$ 2,7182818284 5904523536 0287471352 6624977572 4709369995 9574966967 6277240766 3035354759 4571382178 5251664274…

Le nombre *e* est également un nombre transcendant. On dit qu'un nombre est transcendant s'il n'est solution d'aucune équation à coefficients entiers.

Le nombre $\sqrt{2}$ par exemple, est irrationnel mais n'est pas transcendant puisqu'il est solution de l'équation $x^2 = 2$. Un tel nombre est dit «algébrique».

Le premier à s'intéresser de façon sérieuse au nombre *e* est le mathématicien suisse *Leonhard Euler* (1707 ; 1783), ci-dessus. C'est à lui que nous devons le nom de ce nombre. Non pas qu'il s'agisse de l'initiale de son nom mais peut être car *e* est la première lettre du mot exponentiel.

Dans « *Introductio in Analysin infinitorum* » publié en 1748, *Euler* explique que :

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

Rappelons que par exemple 5! se lit "factoriel 5" et est égal à 1 x 2 x 3 x 4 x 5.
Par cette formule, il obtient une estimation de *e* avec 18 décimales exactes.
Nous devons aussi à Euler la démonstration de l'irrationalité de *e*.

Conséquences sur les propriétés algébriques :

Pour tous réels *x* et *y* et pour tout entier relatif *n*, on a

$e^{x+y} = e^x e^y$ $\qquad e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ $\qquad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$ $\qquad e^{nx} = (e^x)^n$

Application 1:

Vidéo mathssa.fr/expo1 (3mns31s)

Simplifier l'écriture des nombres suivants :

$A = \frac{e^7 \times e^{-4}}{e^{-5}}$ $= \frac{e^{7-4}}{e^{-5}}$ $= e^{3-(-5)}$ $= e^8$	$B = (e^5)^{-6} \times e^{-3}$ $= e^{5\times(-6)} \times e^{-3}$ $= e^{-30-3}$ $= e^{-33}$	$C = \frac{(e^{2x})^3}{e^{3x+1} \times e^{-x-1}}$ $= \frac{e^{2x\times3}}{e^{3x+1-x-1}}$ $= \frac{e^{6x}}{e^{2x}}$ $= e^{6x-2x} = e^{4x}$

Application 2:

Démontrer que pour tout réel x, $\frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x+1}$

Pour tout x réel , $\frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{1}{1+\frac{1}{e^x}}$

$$= \frac{1}{\frac{e^x}{e^x}+\frac{1}{e^x}}$$

$$= \frac{1}{\frac{e^x+1}{e^x}}$$

$$= \frac{e^x}{e^x+1}$$

III. Etude de la fonction exponentielle

1.Signe et variations de la fonction exponentielle

Propriété :
La fonction exponentielle est **strictement positive** sur $\mathbb{R}$.

Preuve :pour tout réel $x, e^{2x} = (e^x)^2$

En remplaçant $x\ par\ \frac{x}{2}$, on obtient : $e^{2\frac{x}{2}} = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2$ soit $e^x = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2$.

On en déduit que $e^x \geq 0$. Or on a vu que l'exponentielle ne s'annule pas.

On en déduit que pour tout réel x, $e^x > 0$.

Corollaire :
La fonction exponentielle est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

Preuve :pour tout réel $x, exp'(x) = e^x$ or $e^x > 0$.
On en déduit que pour tout réel x, $exp'(x) > 0$.
La fonction exponentielle est donc **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

Conséquence : Pour tous réels a et b, on a :
a) $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$
b) $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$
c) $e^a > e^b \Leftrightarrow a > b$

Méthode : Résoudre une équation ou une inéquation

Vidéo mathssa.fr/expo2 (3mns31s)

Vidéo mathssa.fr/expo3 (2mns42s)

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{x^2-3} - e^{-2x} = 0$.
b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{4x-1} \geq 1$.

a)	b)
$e^{x^2-3} - e^{-2x} = 0$ $\Leftrightarrow e^{x^2-3} = e^{-2x}$ $\Leftrightarrow x^2 - 3 = -2x$ $\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$ $a = 1, b = 2, c = -3$ On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 16$ $\Delta > 0$. L'équation $x^2 + 2x - 3 = 0$ admet donc deux solutions : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-\sqrt{16}}{2} = -3$ $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+\sqrt{16}}{2} = 1$ S={-3 ;1}	$e^{4x-1} \geq 1$ $\Leftrightarrow e^{4x-1} \geq e^0$ $\Leftrightarrow 4x - 1 \geq 0$ $\Leftrightarrow 4x \geq 1$ $\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{4}$ S=$[\frac{1}{4} ; +\infty[$

Méthode : Étudier une fonction exponentielle

Vidéo mathssa.fr/expo4 (10mns42s)

Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)e^x$.
a) Calculer la dérivée de la fonction *f*.
b) Dresser le tableau de variations de la fonction *f*.
c) Déterminer une équation de la tangente à Cf au point d'abscisse 0.

$a)f$ est **dérivable** sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x,

- $f=uv$
- $u(x) = x + 1 \quad u'(x) = 1$
  $v(x) = e^x \quad v'(x) = e^x$
- $f'=u'v + uv'$
  $f'(x) = 1e^x + (x+1)e^x$
  $= e^x(1 + x + 1)$
  $= e^x(x+2)$

b)$e^x > 0$. Ainsi $f'(x)$ est du signe de $x + 2$.

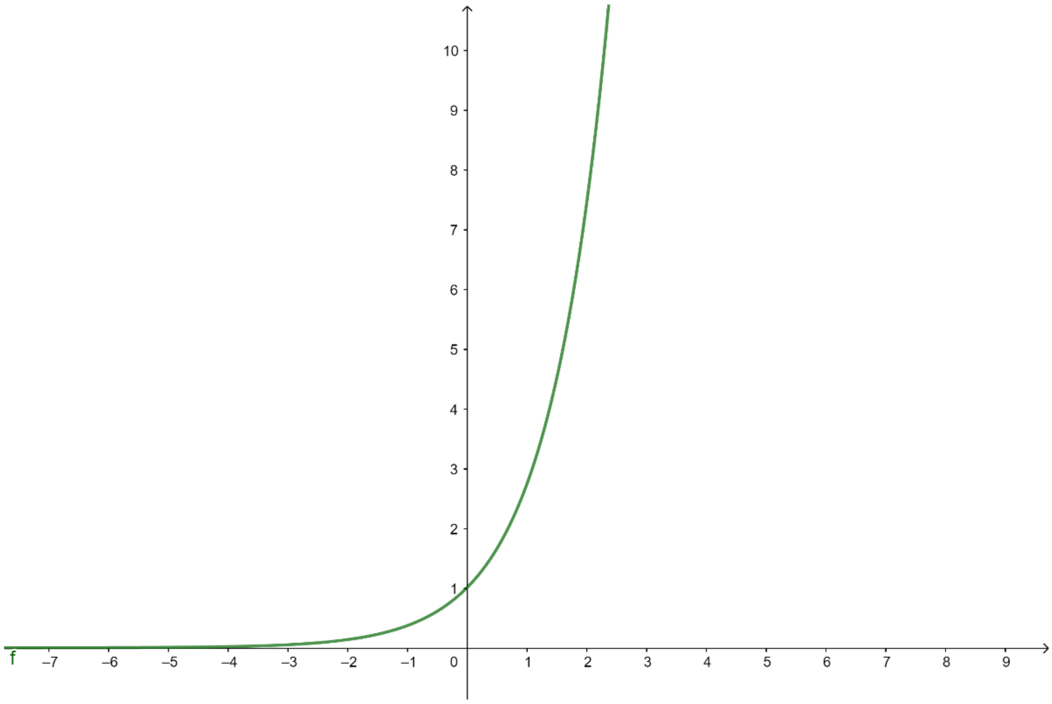
$x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$-\frac{1}{e^2}$	$\nearrow$	

f est décroissante sur $]-\infty\,;-2]$ et croissante sur $[-2\,;+\infty[$ $\quad f(-2) = (-2+1)e^{-2} = -e^{-2} = -\frac{1}{e^2}$.

c)Une équation de la tangente à Cf au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$
On remplace a par 0.
$y = f'(0)(x-0) + f(0)$ or $f(0) = (0+1)e^0 = 1$ et $f'(0) = e^0(0+2) = 2$
$y = 2x + 1$

2.Courbe représentative de la fonction exponentielle



3.Dérivée de e^{ax+b} :

Propriété
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{ax+b}$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = ae^{ax+b}$

Preuve : $f(x)$ est de la forme $g(ax+b)$ avec g la fonction exponentielle.
Comme g est dérivable sur $\mathbb{R}$ alors f l'est aussi et pour tout réel x,
$f'(x) = a \times g'(ax+b) = a \times exp'(ax+b) = a \times e^{ax+b}$

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{3x-5}$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = 3e^{3x-5}$

Si on généralise : $(e^{ax+b})' = (ax+b)'e^{ax+b}$ $(e^u)' = u'e^u$

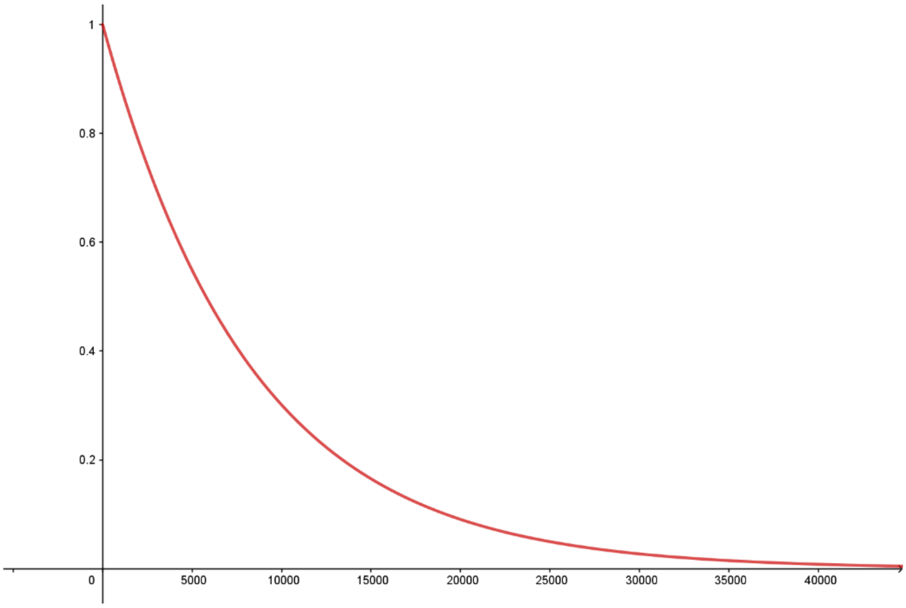
<u>Propriété : hors programme</u>

u est une fonction **<u>dérivable</u>** sur un intervalle I.

Alors la fonction f définie sur I par $e^{u(x)}$ est dérivable sur I et pour tout réel x de I , on a : $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$. Soit la formule $(e^u)' = u'e^u$

<u>Exercice : étude d'une fonction exponentielle négative</u>

Soit f la fonction définie sur [0 ; 50 000] par $f(x) = e^{-0,00012x}$.



Déterminer $f'(x)$ puis étudier son sens de variations

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = -0,00012e^{-0,00012x}$

$e^{-0,00012x} > 0$ $f'(x)$ est du signe de -0,00012.

x	0 50000
$f'(x)$	-
$f(x)$	1 ↘ e^{-6}

f est décroissante sur [0 ;50 000].

$f(0) = e^{-0,00012\times 0} = e^0 = 1$

$f(50000) = e^{-0,00012\times 50\,000} = e^{-6}$