**CHAPITRE 12 – LES SUITES 2ème partie**

Introduction : [mathssa.fr/introsuitearitgeom](http://www.mathssa.fr/introsuitearitgeom)

**I. Suites arithmétiques**

**1.Définition**

Exemple :

Considérons une suite numérique (*un*) où la différence entre un terme et son prédécesseur reste constante et égale à 5. Si le premier terme est égal à 3, les premiers termes successifs sont :

*u0* = 3,

*u1* = 8,

*u2* = 13,

*u3* = 18

Une telle suite est appelée une suite arithmétique de raison r=5 et de premier terme 3.

La suite est donc définie par : $u\_{n+1}=u\_{n}+5$ et $u\_{0}=3$.

|  |
| --- |
| Définition : Une suite (*un*) est une **suite arithmétique** s'il existe un nombre *r* tel que pour tout entier *n*, on a : $u\_{n+1}=u\_{n}+r$ .Le nombre *r* est appelé **raison** de la suite. |

**Remarque importante :** une suite (*un*) est une **suite arithmétique lorsque l’écart entre 2 termes consécutifs est constant et ne dépend pas de** $n$**.**

Méthode :démontrer si une suite est arithmétique

Pour savoir si une suite (*un*) est arithmétique, il suffit de calculer $u\_{n+1}-u\_{n}$ pour tout entier naturel $n$.

Si $u\_{n+1}-u\_{n}$ est indépendant de $n$ alors la suite est arithmétique.

Sinon elle n’est pas arithmétique

 **Vidéo** [mathssa.fr/arit1](http://www.mathssa.fr/arit1) **(4mns)**

1) La suite (*un*) définie par : $u\_{n}=7-9n$ est-elle arithmétique ?

2) La suite (*vn*) définie par : $v\_{n}=n^{2}+3$ est-elle arithmétique ?

1) pour tout entier naturel $n$,

$u\_{n+1}-u\_{n}=$ $7-9\left(n+1\right)-\left(7-9n\right)=7-9n-9-7+9n=-9$

La différence entre un terme et son précédent reste constante et égale à –9.

(*un*) est une suite arithmétique de raison –9.

2) pour tout entier naturel $n$, $(a+b)²=a²+2ab+b² (n+1)²=n²+2n+1²=n²+2n+1$

$v\_{n+1}-v\_{n}=$ $(n+1)^{2}+3-\left(n^{2}+3\right)=n^{2}+2n+1+3-n^{2}-3=2n+1$

La différence entre un terme et son précédent ne reste pas constante.

(*vn*) n'est pas une suite arithmétique.

|  |
| --- |
| **Propriété :** Soit (*un*) est une suite arithmétique de raison *r* et de premier terme *u0*.Pour tout entier naturel *n*, on a : $u\_{n}=u\_{0}+nr$ |

Démonstration au programme : (8 minutes)

 **Vidéo** [mathssa.fr/arit2](http://www.mathssa.fr/arit2)

La suite arithmétique (*un*) de raison *r* et de premier terme *u0* vérifie la relation

$u\_{n+1}=u\_{n}+r$.

En calculant les premiers termes :

$u\_{1}=u\_{0}+r$

$u\_{2}=u\_{1}+r$

$u\_{3}=u\_{2}+r$

…

$u\_{n}=u\_{n-1}+r$

En additionnant membre à membre ces *n* égalités, on obtient :

$u\_{1}+u\_{2}+u\_{3}+…+u\_{n}=u\_{0}+u\_{1}+u\_{2}+…+u\_{n-1}+n×r$

Soit, en retranchant aux deux membres les termes identiques :

$$u\_{n}=u\_{0}+nr$$

**Et si le premier terme de la suite est** $u\_{1} $**?**

*u1* ,

*u2* = *u1*+*r*

*u3* = *u1*+*r+r= u1*+2*r*

*u4* = *u1*+2*r+r= u1*+3*r*

|  |
| --- |
| **Propriété :**Soit (*un*) est une suite arithmétique de raison *r* et de premier terme *u1*.Pour tout entier naturel *n non nul*, on a : $u\_{n}= u\_{1}+\left(n-1\right)r$ |

Méthode : Déterminer la raison et le premier terme d'une suite arithmétique

 **Vidéo** [mathssa.fr/arit3](http://www.mathssa.fr/arit3) **(5mns)**

Considérons la suite arithmétique (*un*) tel que $u\_{5}=7$ et $u\_{9}=19$.

1) Déterminer la raison et le premier terme de la suite (*un*).

2) Exprimer *un* en fonction de *n*.

1) Les termes de la suite sont de la forme $u\_{n}=u\_{0}+nr$

$u\_{5}= u\_{0}+5r=7$

$u\_{9}= u\_{0}+9r=19$ En soustrayant membre à membre, on obtient :

 $9r-5r=19-7.$

Soit : $4r= 12$

Et donc $r=3$.

Comme $u\_{0}+5r=7$, on a : $u\_{0}+5×3=7$, et donc : $u\_{0}= 7-15=-8$

2) $u\_{n}=u\_{0}+nr$ soit $u\_{n}= -8+n×3$ ou encore $u\_{n}= 3n-8$

**2. Variations**

|  |
| --- |
| **Propriété :** (*un*) est une suite arithmétique de raison *r.*- Si *r* > 0 alors la suite (*un*) est croissante.- Si *r* < 0 alors la suite (*un*) est décroissante. |

Démonstration : $u\_{n+1}-u\_{n}=u\_{n}+r-u\_{n}=r$.

- Si *r* > 0 alors $u\_{n+1}-u\_{n}>0$ et la suite (*un*) est croissante.

- Si *r* < 0 alors $u\_{n+1}-u\_{n}<0$ et la suite (*un*) est décroissante.

Exemple :

 **Vidéo** [mathssa.fr/arit4](http://www.mathssa.fr/arit4) **(3mns)**

La suite arithmétique (*un*) définie par $u\_{n}=5-4n$ est décroissante car de raison négative et égale à –4.

**3.Représentation graphique**

|  |
| --- |
| **Propriété :**Les points de la représentation graphique d'une suite arithmétique sont alignés. |

Exemple :

On a représenté ci-dessous la suite arithmétique de raison –0,5 et de premier terme 4.



**Enigme :** [mathssa.fr/arit5](http://www.mathssa.fr/arit5)

**Réponse à l’énigme :** [mathssa.fr/arit6](http://www.mathssa.fr/arit6) **(à partir de 2mns20)**

**4.Somme des termes consécutifs d’une suite arithmétique :**

|  |
| --- |
| **Propriété :** Soit *n* un entier naturel non nul alors on a : $1+2+3+…+n=$ $\frac{n\left(n+1\right)}{2}$  |

Remarque : Il s'agit de la somme des *n* premiers termes d'une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme 1.

Démonstration au programme : (avec historique)

 **Vidéo** [mathssa.fr/arit7](http://www.mathssa.fr/arit7) **(6mns40)**

 1 + 2 + 3 + … + *n*–1 + *n*

+ *n* + *n*–1 + *n*–2 + … + 2 + 1

 (*n*+1) + (*n*+1) + (*n*+1) + … + (*n*+1) + (*n*+1)

 = *n* × (*n*+1)

Donc : $2×\left(1+2+3+…+n\right)=n\left(n+1\right)$ Et donc : $1+2+3+…+n=$ $\frac{n\left(n+1\right)}{2}$.

Application : calculer les sommes $S=1+2+3+…+348$

$1+2+3+…+348=$ $\frac{348×349}{2}=60 726$.



Une anecdote relate comment le mathématicien allemand *Carl Friedrich Gauss* (1777 ; 1855), alors âgé de 10 ans a fait preuve d’un talent remarquable pour le calcul mental. Voulant occuper ses élèves, le professeur demande d’effectuer des additions, plus exactement d’effectuer la somme des nombres de 1 à 100. Après très peu de temps, le jeune *Gauss* impressionne son professeur en donnant la réponse correcte. Sa technique consiste à regrouper astucieusement les termes extrêmes par deux. Sans le savoir encore, *Gauss* a découvert la formule permettant de calculer la somme des termes d’une série arithmétique.

|  |
| --- |
| **Propriété :** soit $(u\_{n})$ une suite arithmétique de raison $r$ et de 1er terme $u\_{0}$.$u\_{0}+u\_{1}+…+u\_{n}=\left(n+1\right)×\frac{u\_{0}+ u\_{n} }{2}$ =$nombre de termes×\frac{ premier terme+dernier terme}{2}$ |

**Preuve :**

$u\_{0}+u\_{1}+u\_{2}…+u\_{n-1}+u\_{n}$ $=u\_{0}+(u\_{0}+r)+(u\_{0}+2r)+ …+(u\_{0}+(n-1)r)+(u\_{0}+nr)$

 $=u\_{0}+u\_{0}+u\_{0}+ …+u\_{0}+u\_{0}+r+2r+..(n-1)r+nr$

 $=(n+1)u\_{0}+r(1+2+..n-1+n)$

 $=(n+1)u\_{0}+r\frac{n\left(n+1\right)}{2}$

 $=(n+1)(u\_{0}+r\frac{n}{2})$

 $=(n+1)×\frac{2u\_{0}+rn}{2}$

 $=(n+1)×\frac{u\_{0}+u\_{0}+rn}{2}$

 $=\left(n+1\right)×\frac{u\_{0}+ u\_{n} }{2}$

Point méthode : calcul d’une somme dont les termes sont en progression arithmétique

* On repère le 1er terme et la raison de la suite arithmétique
* On détermine l’indice du dernier terme de la somme en résolvant une équation
* On applique la formule précédente

Exercice d’application :

Calculer la somme S$=33+36+39+ …+267$

* + - * S est la somme des termes consécutifs d’une suite arithmétique de raison 3 de 1er terme $u\_{0}=33$
			* On résout l’équation $u\_{n}= 267$ soit $u\_{0}+nr=267$

$33+3n=267⟺3n=234$ $⟺n=78$

* + - * $S=u\_{0}+u\_{1}+ …+u\_{78}= 79×\frac{\begin{array}{c}u\_{0}+ u\_{78}\\ \end{array}}{2}$ = $79×\frac{\begin{array}{c}33+267\\ \end{array}}{2}=11 850$

**II. Suites géométriques**

**1.Définition**

Exemple :

Considérons une suite numérique (*un*) où le rapport entre un terme et son précédent reste constant et égale à 2.Si le premier terme est égal à 5, les premiers termes successifs sont :

*u0* = 5,

*u1* = 10,

*u2* = 20,

*u3* = 40

Une telle suite est appelée une suite géométrique de raison q=2 et de premier terme 5.

La suite est donc définie par : $u\_{n+1}=2u\_{n}$ et $u\_{0}=5$.

|  |
| --- |
| Définition : Une suite (*un*) est une **suite géométrique** s'il existe un nombre *q* tel que pour tout entier *n*, on a :$u\_{n+1}=q×u\_{n}$. Le nombre *q* est appelé **raison** de la suite. |

**Remarque importante :** une suite (*un*) est une **suite géométrique lorsque le rapport entre 2 termes consécutifs est constant et ne dépend pas de** $n$**.**$ (\frac{u\_{n+1}}{u\_{n}}$)

Méthode : Démontrer si une suite est géométrique

 **Vidéo** [mathssa.fr/geom1](http://www.mathssa.fr/geom1) **(3mns45s)**

La suite (*un*) définie par : $u\_{n}=3×5^{n}$ est-elle géométrique ?

Pour tout entier naturel $n$,

$$\frac{u\_{n+1}}{u\_{n}}= \frac{3×5^{n+1}}{3×5^{n}}=\frac{3×5^{n}×5}{3×5^{n}}=5$$

Le rapport entre un terme et son précédent reste constant et égale à 5.

(*un*) est une suite géométrique de raison 5 et de premier terme $u\_{0}=3×5^{0}=3$.

|  |
| --- |
| **Propriété :** Soit (*un*) est une suite géométrique de raison *q* et de premier terme *u0*.Pour tout entier naturel *n*, on a : $u\_{n}=u\_{0}×q^{n}$ |

Démonstration au programme :

 **Vidéo** [mathssa.fr/geom2](http://www.mathssa.fr/geom2) **(10mns28)**

La suite géométrique (*un*) de raison *q* et de premier terme *u0* vérifie la relation

$u\_{n+1}=q×u\_{n}$.

- Si *q* ou *u0* est nul, alors tous les termes de la suite sont nuls. La démonstration est évidente dans ce cas.

- Dans la suite, on suppose donc que *q* et *u0* sont non nuls. Dans ce cas, tous les termes de la suite sont non nuls.

En calculant les premiers termes :

$u\_{1}=q×u\_{0}$

$u\_{2}=q×u\_{1}$

$u\_{3}=q×u\_{2}$

…

$u\_{n}=q×u\_{n-1}$ En multipliant membre à membre ces *n* égalités, on obtient :

$u\_{1}×u\_{2}×u\_{3}×…×u\_{n}=u\_{0}×u\_{1}×u\_{2}×…×u\_{n-1}×q^{n}$

Comme les termes de la suite sont non nuls, on peut diviser aux deux membres les facteurs identiques :

 $u\_{n}=u\_{0}×q^{n}$

**Et si le premier terme de la suite est** $u\_{1} $**?**

*u1* ,

*u2* = *u1×q*

*u3* = *u1×q²*

*u4* = *u1×q3*

|  |
| --- |
| **Propriété :**Soit (*un*) est une suite géométrique de raison *q* et de premier terme *u1*.Pour tout entier naturel *n non nul*, on a : $u\_{n}= u\_{1}×q^{n-1}$ |

Exemple concret :

On place un capital de 10 000€ sur un compte dont les intérêts annuels s'élèvent à 4%.

Déterminons le capital disponible dans 10 ans.

On appelle $u\_{n}$ le capital disponible au bout de $n$ années. Il est clair que $u\_{0}=10 000.$

Augmenter de 4% revient à multiplier par $1+\frac{4}{100}=1+0,04=1,04$

Chaque année, le capital est donc multiplié par 1,04

De manière générale : $u\_{n+1}= 1,04×u\_{n}$ (ou $\frac{u\_{n+1}}{u\_{n}}=1,04)$

La suite $(u\_{n})$ est donc une suite géométrique de raison q=1,04 et de 1er terme $u\_{0}=10 000.$

Pour tout entier naturel *n* , $u\_{n}=u\_{0}×q^{n}=10000×1,04^{n}$

$$u\_{10}=10000×1,04^{10}≈14 802$$

Dans 10 ans , le capital disponible sera de 14 802 €.

Méthode : Déterminer la raison et le premier terme d'une suite géométrique

 **Vidéo** [mathssa.fr/geom3](http://www.mathssa.fr/geom3) **(5mns05)**

Considérons la suite géométrique (*un*) tel que $u\_{4}=2$ et $u\_{7}=16$.

Déterminer la raison et le premier terme de la suite (*un*).

Les termes de la suite sont de la forme $u\_{n}=u\_{0}×q^{n}$.

$u\_{7}= u\_{0}×q^{7}=16$

$u\_{4}= u\_{0}×q^{4}=2$ En divisant membre à membre, on obtient :

 $\frac{u\_{0}×q^{7}}{u\_{0}×q^{4}}= \frac{16}{2}$

Soit : $q^{3}=8$

On utilise la fonction racine troisième de la calculatrice pour trouver le nombre qui élevé au cube donne 64.

Ainsi $q=\sqrt[3]{8}=2$

Comme $u\_{4}=u\_{0}×q^{4}=2$, on a : $u\_{0}×2^{4}=2$ et donc : $u\_{0}=$ $\frac{1}{8}$

**2.Exponentielle et suite géométrique**

Propriété :

La suite $\left(e^{na}\right)$ est une suite géométrique de raison $e^{a}$.

**Preuve :**

Pour tout entier naturel $n$, $u\_{n}=e^{na}$

$\frac{u\_{n+1}}{u\_{n}}= \frac{e^{\left(n+1\right)a}}{e^{na}}=e^{na+a-na}=e^{a}.$

On rappelle qu’une suite géométrique de raison *q* et de premier terme $u\_{0}$ a pour terme général : $u\_{n}=u\_{0}q^{n}$.

Méthode : Déterminer une suite géométrique comprenant une exponentielle

 **Vidéo** [mathssa.fr/suiteexp](http://www.mathssa.fr/suiteexp) **(7mns)**

1) Dans chaque cas, déterminer la raison et le premier terme de la suite géométrique dont le terme général est :

 a) $u\_{n}=e^{4n}$ b) $u\_{n}=2e^{-3n}$ c) $u\_{n}=-e^{\frac{n}{3}}$ d) $u\_{n}=e^{2n-1}$

2) Déterminer le terme général d’une suite géométrique de raison $\frac{1}{e}$ et de premier terme 3.

1) a) $u\_{n}=e^{4n}=1\left(e^{4}\right)^{n}$

$\left(u\_{n}\right)$ est une suite géométrique de raison $e^{4}$ et de premier terme 1.

b) $u\_{n}=2e^{-3n}=2\left(e^{-3}\right)^{n}$

$\left(u\_{n}\right)$ est une suite géométrique de raison $e^{-3}$ et de premier terme 2.

c) $u\_{n}=-e^{\frac{n}{3}}=\left(-1\right)\left(e^{\frac{1}{3}}\right)^{n}$

$\left(u\_{n}\right)$ est une suite géométrique de raison $e^{\frac{1}{3}}$ et de premier terme –1.

d) $u\_{n}=e^{2n-1}=e^{2n}e^{-1}=e^{-1}\left(e^{2}\right)^{n}=$ $\frac{1}{e}$ $\left(e^{2}\right)^{n}$

$\left(u\_{n}\right)$ est une suite géométrique de raison $e^{2}$ et de premier terme $\frac{1}{e}$.

2) $\left(u\_{n}\right)$ est suite géométrique de raison $\frac{1}{e}$ et de premier terme 3, donc :

$u\_{n}=3\left(\frac{1}{e}\right)^{n}=3\left(e^{-1}\right)^{n}=3e^{-n}$.

**3.Variations :**

|  |
| --- |
| **Propriété :** (*un*) est une suite géométrique de raison *q* et de premier terme non nul *u0.*Pour $u\_{0}>0$ :- Si *q* > 1 alors la suite (*un*) est croissante.- Si 0 < *q* < 1 alors la suite (*un*) est décroissante.Pour $u\_{0}<0$ :- Si *q* > 1 alors la suite (*un*) est décroissante.- Si 0 < *q* < 1 alors la suite (*un*) est croissante. |

Démonstration dans le cas où *u0* > 0 :

Pour tout entier naturel ,

$u\_{n+1}-u\_{n}=u\_{0}q^{n+1}-u\_{0}q^{n}=u\_{0}q^{n}\left(q-1\right)$.

Comme *u0* > 0 , $u\_{n+1}-u\_{n}$ est du signe de $q^{n}\left(q-1\right)$

- Si *q* > 1 alors $q-1>0 et q^{n}>0 $.Par conséquent, $u\_{n+1}-u\_{n}>0$ et la suite (*un*) est croissante.

- Si 0 < *q* < 1 alors $q-1<0 et q^{n}>0 $.Par conséquent $u\_{n+1}-u\_{n}<0$ et la suite (*un*) est décroissante.

Exemple :

 **Vidéo** [**mathssa.fr/varsuitgeo**](http://www.mathssa.fr/varsuitgeo)  **(7mns)**

La suite géométrique (*un*) définie par $u\_{n}=-4×2^{n}$ est décroissante car le premier terme est négatif et la raison est supérieure à 1.



Remarque : Si la raison *q* est négative alors la suite géométrique n'est pas monotone.

**4.Somme des termes consécutifs d’une suite géométrique :**

|  |
| --- |
| **Propriété :** Soit *n* un entier naturel non nul et *q* un réel différent de 1 alors on a : $1+q+q^{2}+q^{3}+…+q^{n}=$ $\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ |

Remarque : Il s'agit de la somme des *n*+1 premiers termes d'une suite géométrique de raison *q* et de premier terme 1.

Démonstration au programme :

 **Vidéo** [**mathssa.fr/sommegeo**](http://www.mathssa.fr/sommegeo) **(7mns30s)**

$S=1+q+q^{2}+q^{3}+…+q^{n}$

$q×S=q+q^{2}+q^{3}+q^{4}+…+q^{n+1}$ Ainsi , par soustraction membre à membre

$S-q×S=\left(1+q+q^{2}+q^{3}+…+q^{n}\right)-\left(q+q^{2}+q^{3}+q^{4}+…+q^{n+1}\right)$

$S-q×S=1-q^{n+1}$

$S×\left(1-q\right)=1-q^{n+1}$ (or $1-q\ne 0$)

$S=$ $\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Application :

 **Vidéo** [**mathssa.fr/geom4**](http://www.mathssa.fr/geom4) **(7mns50s)**

Calculer la somme *S* suivante : $S=1+3+3^{2}+3^{3}+…+3^{13}$

$S=1+3+3^{2}+3^{3}+…+3^{13}$ = $\frac{1-3^{13+1}}{1-3}$=$\frac{1-3^{14}}{-2}=2 391 484$

|  |
| --- |
| **Propriété :** soit $(u\_{n})$ une suite géométrique de raison $q\ne 1$ et de 1er terme $u\_{0}$.$u\_{0}+u\_{1}+…+u\_{n}=\frac{u\_{0}-u\_{n+1} }{1-q}$ =$\frac{ premier terme-terme qui suit le dernier}{1-raison}$ |

**Preuve :**

$u\_{0}+u\_{1}+u\_{2}+…+u\_{n-1}+u\_{n}$ $=u\_{0}+u\_{0}×q+u\_{0}×q^{2}+ …+u\_{0}×q^{n-1}+u\_{0}×q^{n}$

 $=u\_{0}×(1+q+q^{2}+ …+q^{n-1}+q^{n})$

 $=u\_{0}×\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

 $=\frac{u\_{0}-u\_{0}q^{n+1}}{1-q}$

 = $\frac{u\_{0}-u\_{n+1} }{1-q}$

Point méthode : calcul d’une somme dont les termes sont en progression géométrique

* On repère le 1er terme , le dernier terme et la raison de la suite géométrique
* On détermine l’indice du dernier terme de la somme en résolvant une équation
* On applique la formule précédente

Exercice d’application :

Calculer la somme S$=36+108+324+ …+57 395 628$

* + - * S est la somme des termes consécutifs d’une suite géométrique de 1er terme 36 et de dernier terme $57 395 628$ et de raison q=3.
			* $S= \frac{36-57 395 628×3 }{1-3}$ = 86 093 424

**Problème :**

Hervé souhaite faire creuser un puits au fond de son jardin et atteindre une nappe d'eau annoncée à 37 mètres de profondeur. Une entreprise lui propose le tarif suivant: 85 euros pour le premier mètre creusé, puis pour chaque mètre suivant, le mètre creusé est facturé 2% de plus que le mètre précèdent.
Pour tout entier naturel *n≥1*, on note $u\_{n} $le prix du nième mètre creusé

1. Déterminer la nature de la suite ($u\_{n})$.

2. Exprimer $u\_{n}$en fonction de $n$.

3. Déterminer combien Hervé devra payer si l'eau est effectivement à 37 mètres de profondeur.

4. Ecrire une fonction Python permettant de déterminer le prix à payer en fonction de $n$ le nombre de mètres creusés.

1 Augmenter de 2% revient à multiplier par $1+\frac{2 }{100}=1,02$

Pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à 1, $u\_{n+1}=1,02u\_{n}$

La suite $(u\_{n})$ est donc une suite **géométrique** de raison $1,02$ et de premier terme $u\_{1}=85$

2. Pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à 1, $u\_{n}=u\_{1}q^{n-1}=85×1,02^{n-1}$.

3. On doit calculer $u\_{1}+…+u\_{37}=\frac{u\_{1}-u\_{38} }{1-q}$

$$u\_{38}=85×1,02^{37}≈176,86$$

$$u\_{1}+…+u\_{37}=\frac{85-176,86 }{1-1,02}≈4593$$

La facture est de 4593 €.

4

