

CHAPITRE 12 – LES SUITES 2ème partie

Introduction : mathssa.fr/introsuitearitgeom

I. Suites arithmétiques

1. Définition

Exemple :

Considérons une suite numérique (u_n) où la différence entre un terme et son prédécesseur reste constante et égale à 5. Si le premier terme est égal à 3, les premiers termes successifs sont :

$$u_0 = 3,$$

$$u_1 = 8,$$

$$u_2 = 13,$$

$$u_3 = 18$$

Une telle suite est appelée une **suite arithmétique** de **raison $r=5$** et de premier terme 3.

La suite est donc définie par : $u_{n+1} = u_n + 5$ et $u_0 = 3$.

Définition :

Une suite (u_n) est une **suite arithmétique** s'il existe un nombre r tel que pour tout entier n , on a :

$$u_{n+1} = u_n + r. \text{ Le nombre } r \text{ est appelé } \mathbf{raison} \text{ de la suite.}$$

Remarque importante : une suite (u_n) est une **suite arithmétique** lorsque l'écart entre 2 termes consécutifs est constant et ne dépend pas de n .

Méthode : démontrer si une suite est arithmétique

Pour savoir si une suite (u_n) est arithmétique, il suffit de calculer $u_{n+1} - u_n$ pour tout entier naturel n .

Si $u_{n+1} - u_n$ est indépendant de n alors la suite est arithmétique.

Sinon elle n'est pas arithmétique

 **Vidéo** mathssa.fr/arit1 (4mns)

1) La suite (u_n) définie par : $u_n = 7 - 9n$ est-elle arithmétique ?

2) La suite (v_n) définie par : $v_n = n^2 + 3$ est-elle arithmétique ?

1) pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} - u_n = 7 - 9(n+1) - (7 - 9n) = 7 - 9n - 9 - 7 + 9n = -9$$

La différence entre un terme et son précédent reste constante et égale à -9 .

(u_n) est une suite arithmétique de raison -9 .

2) pour tout entier naturel n , $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1^2 = n^2 + 2n + 1$

$$v_{n+1} - v_n = (n+1)^2 + 3 - (n^2 + 3) = n^2 + 2n + 1 + 3 - n^2 - 3 = 2n + 1$$

La différence entre un terme et son précédent ne reste pas constante.

(v_n) n'est pas une suite arithmétique.

Propriété :

Soit (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 .

Pour tout entier naturel n , on a : $u_n = u_0 + nr$

[Démonstration au programme : \(8 minutes\)](#)

 **Vidéo** mathssa.fr/arit2

La suite arithmétique (u_n) de raison r et de premier terme u_0 vérifie la relation

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

En calculant les premiers termes :

$$u_1 = u_0 + r$$

$$u_2 = u_1 + r$$

$$u_3 = u_2 + r$$

...

$$u_n = u_{n-1} + r$$

En additionnant membre à membre ces n égalités, on obtient :

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + n \times r$$

Soit, en retranchant aux deux membres les termes identiques :

$$u_n = u_0 + nr$$

Et si le premier terme de la suite est u_1 ?

$$u_1,$$

$$u_2 = u_1 + r$$

$$u_3 = u_1 + r + r = u_1 + 2r$$

$$u_4 = u_1 + 2r + r = u_1 + 3r$$

Propriété :

Soit (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_1 .

Pour tout entier naturel n non nul, on a : $u_n = u_1 + (n - 1)r$

Méthode : Déterminer la raison et le premier terme d'une suite arithmétique

 **Vidéo** mathssa.fr/arit3 (5mns)

Considérons la suite arithmétique (u_n) tel que $u_5 = 7$ et $u_9 = 19$.

1) Déterminer la raison et le premier terme de la suite (u_n) .

2) Exprimer u_n en fonction de n .

1) Les termes de la suite sont de la forme $u_n = u_0 + nr$

$$u_5 = u_0 + 5r = 7$$

$$u_9 = u_0 + 9r = 19 \quad \text{En soustrayant membre à membre, on obtient :}$$

$$9r - 5r = 19 - 7.$$

$$\text{Soit : } 4r = 12$$

$$\text{Et donc } r = 3.$$

$$\text{Comme } u_0 + 5r = 7, \text{ on a : } u_0 + 5 \times 3 = 7, \text{ et donc : } u_0 = 7 - 15 = -8$$

$$2) u_n = u_0 + nr \text{ soit } u_n = -8 + n \times 3 \text{ ou encore } u_n = 3n - 8$$

2. Variations

Propriété : (u_n) est une suite arithmétique de raison r .

- Si $r > 0$ alors la suite (u_n) est croissante.
- Si $r < 0$ alors la suite (u_n) est décroissante.

Démonstration : $u_{n+1} - u_n = u_n + r - u_n = r$.

- Si $r > 0$ alors $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite (u_n) est croissante.
- Si $r < 0$ alors $u_{n+1} - u_n < 0$ et la suite (u_n) est décroissante.

Exemple :



Vidéo mathssa.fr/arit4 (3mns)

La suite arithmétique (u_n) définie par $u_n = 5 - 4n$ est décroissante car de raison négative et égale à -4 .

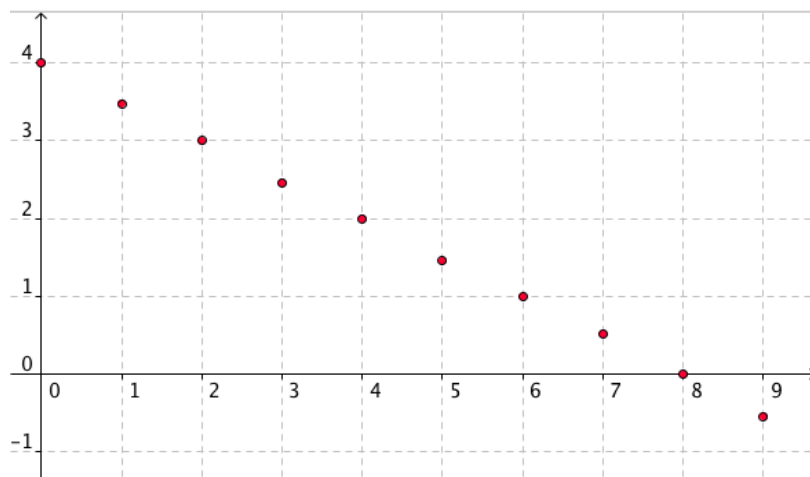
3.Représentation graphique

Propriété :

Les points de la représentation graphique d'une suite arithmétique sont alignés.

Exemple :

On a représenté ci-dessous la suite arithmétique de raison $-0,5$ et de premier terme 4.



Enigme : mathssa.fr/arit5

Réponse à l'énigme : mathssa.fr/arit6 (à partir de 2mns20)

4. Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique :**Propriété :**

Soit n un entier naturel non nul alors on a : $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Remarque : Il s'agit de la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme 1.

Démonstration au programme : (avec historique)

 **Vidéo** mathssa.fr/arit7 (6mns40)

$$\begin{array}{cccccccc}
 1 & + & 2 & + & 3 & + \dots + & n-1 & + & n \\
 + & n & + & n-1 & + & n-2 & + \dots + & 2 & + & 1 \\
 \hline
 (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + \dots + & (n+1) & + & (n+1) \\
 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & = n \times (n+1)
 \end{array}$$

Donc : $2 \times (1 + 2 + 3 + \dots + n) = n(n+1)$ Et donc : $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Application : calculer les sommes $S = 1 + 2 + 3 + \dots + 348$

$$1 + 2 + 3 + \dots + 348 = \frac{348 \times 349}{2} = 60\,726.$$



Une anecdote relate comment le mathématicien allemand *Carl Friedrich Gauss* (1777 ; 1855), alors âgé de 10 ans a fait preuve d'un talent remarquable pour le calcul mental. Voulant occuper ses élèves, le professeur demande d'effectuer des additions, plus exactement d'effectuer la somme des nombres de 1 à 100. Après très peu de temps, le jeune *Gauss* impressionne son professeur en donnant la réponse correcte. Sa technique consiste à regrouper astucieusement les termes extrêmes par deux. Sans le savoir encore, *Gauss* a découvert la formule permettant de calculer la somme des termes d'une série arithmétique.

Propriété :

soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de 1^{er} terme u_0 .

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2} = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

Preuve :

$$\begin{aligned}
 u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + u_n &= u_0 + (u_0 + r) + (u_0 + 2r) + \dots + (u_0 + (n-1)r) + (u_0 + nr) \\
 &= u_0 + u_0 + u_0 + \dots + u_0 + u_0 + r + 2r + \dots + (n-1)r + nr \\
 &= (n+1)u_0 + r(1 + 2 + \dots + n-1 + n) \\
 &= (n+1)u_0 + r \frac{n(n+1)}{2} \\
 &= (n+1) \left(u_0 + r \frac{n}{2} \right) \\
 &= (n+1) \times \frac{2u_0 + rn}{2} \\
 &= (n+1) \times \frac{u_0 + u_0 + rn}{2} \\
 &= (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}
 \end{aligned}$$

Point méthode : calcul d'une somme dont les termes sont en progression arithmétique

- On repère le 1^{er} terme et la raison de la suite arithmétique
- On détermine l'indice du dernier terme de la somme en résolvant une équation
- On applique la formule précédente

Exercice d'application :

Calculer la somme $S = 33 + 36 + 39 + \dots + 267$

- S est la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 3 de 1^{er} terme $u_0 = 33$
- On résout l'équation $u_n = 267$ soit $u_0 + nr = 267$
 $33 + 3n = 267 \Leftrightarrow 3n = 234 \Leftrightarrow n = 78$
- $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{78} = 79 \times \frac{u_0 + u_{78}}{2} = 79 \times \frac{33 + 267}{2} = 11\,850$

II. Suites géométriques**1. Définition**Exemple :

Considérons une suite numérique (u_n) où le rapport entre un terme et son précédent reste constant et égale à 2. Si le premier terme est égal à 5, les premiers termes successifs sont :

$$u_0 = 5,$$

$$u_1 = 10,$$

$$u_2 = 20,$$

$$u_3 = 40$$

Une telle suite est appelée une suite géométrique de raison $q=2$ et de premier terme 5.

La suite est donc définie par : $u_{n+1} = 2u_n$ et $u_0 = 5$.

Définition :

Une suite (u_n) est une **suite géométrique** s'il existe un nombre q tel que pour tout entier n , on a :

$$u_{n+1} = q \times u_n. \text{ Le nombre } q \text{ est appelé } \mathbf{raison} \text{ de la suite.}$$

Remarque importante : une suite (u_n) est une **suite géométrique** lorsque le rapport entre 2 termes consécutifs est constant et ne dépend pas de n . $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$

Méthode : Démontrer si une suite est géométrique

Vidéo mathssa.fr/geom1 (3mns45s)

La suite (u_n) définie par : $u_n = 3 \times 5^n$ est-elle géométrique ?

Pour tout entier naturel n ,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3 \times 5^{n+1}}{3 \times 5^n} = \frac{3 \times 5^n \times 5}{3 \times 5^n} = 5$$

Le rapport entre un terme et son précédent reste constant et égale à 5.

(u_n) est une suite géométrique de raison 5 et de premier terme $u_0 = 3 \times 5^0 = 3$.

Propriété :

Soit (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 .
 Pour tout entier naturel n , on a : $u_n = u_0 \times q^n$

Démonstration au programme : **Vidéo** mathssa.fr/geom2 (10mns28)

La suite géométrique (u_n) de raison q et de premier terme u_0 vérifie la relation

$$u_{n+1} = q \times u_n.$$

- Si q ou u_0 est nul, alors tous les termes de la suite sont nuls. La démonstration est évidente dans ce cas.
- Dans la suite, on suppose donc que q et u_0 sont non nuls. Dans ce cas, tous les termes de la suite sont non nuls.

En calculant les premiers termes :

$$u_1 = q \times u_0$$

$$u_2 = q \times u_1$$

$$u_3 = q \times u_2$$

...

$u_n = q \times u_{n-1}$ En multipliant membre à membre ces n égalités, on obtient :

$$u_1 \times u_2 \times u_3 \times \dots \times u_n = u_0 \times u_1 \times u_2 \times \dots \times u_{n-1} \times q^n$$

Comme les termes de la suite sont non nuls, on peut diviser aux deux membres les facteurs identiques :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Et si le premier terme de la suite est u_1 ?

$$u_1,$$

$$u_2 = u_1 \times q$$

$$u_3 = u_1 \times q^2$$

$$u_4 = u_1 \times q^3$$

Propriété :

Soit (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_1 .
 Pour tout entier naturel n non nul, on a : $u_n = u_1 \times q^{n-1}$

Exemple concret :

On place un capital de 10 000€ sur un compte dont les intérêts annuels s'élèvent à 4%.
 Déterminons le capital disponible dans 10 ans.

On appelle u_n le capital disponible au bout de n années. Il est clair que $u_0 = 10\,000$.

Augmenter de 4% revient à multiplier par $1 + \frac{4}{100} = 1 + 0,04 = 1,04$

Chaque année, le capital est donc multiplié par 1,04

De manière générale : $u_{n+1} = 1,04 \times u_n$ (ou $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1,04$)

La suite (u_n) est donc une suite géométrique de raison $q=1,04$ et de 1^{er} terme $u_0 = 10\,000$.

Pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 \times q^n = 10\,000 \times 1,04^n$

$$u_{10} = 10\,000 \times 1,04^{10} \approx 14\,802$$

Dans 10 ans, le capital disponible sera de 14 802 €.

Méthode : Déterminer la raison et le premier terme d'une suite géométrique

 Vidéo mathssa.fr/geom3 (5mns05)

Considérons la suite géométrique (u_n) tel que $u_4 = 2$ et $u_7 = 16$.
Déterminer la raison et le premier terme de la suite (u_n) .

Les termes de la suite sont de la forme $u_n = u_0 \times q^n$.

$$u_7 = u_0 \times q^7 = 16$$

$$u_4 = u_0 \times q^4 = 2 \quad \text{En divisant membre à membre, on obtient :}$$

$$\frac{u_0 \times q^7}{u_0 \times q^4} = \frac{16}{2}$$

$$\text{Soit : } q^3 = 8$$

On utilise la fonction racine troisième de la calculatrice pour trouver le nombre qui élevé au cube donne 64.

$$\text{Ainsi } q = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$\text{Comme } u_4 = u_0 \times q^4 = 2, \text{ on a : } u_0 \times 2^4 = 2 \text{ et donc : } u_0 = \frac{1}{8}$$

2.Exponentielle et suite géométrique

Propriété :

La suite (e^{na}) est une suite géométrique de raison e^a .

Preuve :

Pour tout entier naturel n , $u_n = e^{na}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{(n+1)a}}{e^{na}} = e^{na+a-na} = e^a.$$

On rappelle qu'une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 a pour terme général :

$$u_n = u_0 q^n.$$

Méthode : Déterminer une suite géométrique comprenant une exponentielle

 Vidéo mathssa.fr/suiteexp (7mns)

1) Dans chaque cas, déterminer la raison et le premier terme de la suite géométrique dont le terme général est :

$$\text{a) } u_n = e^{4n} \quad \text{b) } u_n = 2e^{-3n} \quad \text{c) } u_n = -e^{\frac{n}{3}} \quad \text{d) } u_n = e^{2n-1}$$

2) Déterminer le terme général d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{e}$ et de premier terme 3.

1) a) $u_n = e^{4n} = 1(e^4)^n$

(u_n) est une suite géométrique de raison e^4 et de premier terme 1.

b) $u_n = 2e^{-3n} = 2(e^{-3})^n$

(u_n) est une suite géométrique de raison e^{-3} et de premier terme 2.

c) $u_n = -e^{\frac{n}{3}} = (-1)\left(e^{\frac{1}{3}}\right)^n$

(u_n) est une suite géométrique de raison $e^{\frac{1}{3}}$ et de premier terme -1 .

d) $u_n = e^{2n-1} = e^{2n}e^{-1} = e^{-1}(e^2)^n = \frac{1}{e}(e^2)^n$

(u_n) est une suite géométrique de raison e^2 et de premier terme $\frac{1}{e}$.

2) (u_n) est suite géométrique de raison $\frac{1}{e}$ et de premier terme 3, donc :

$$u_n = 3\left(\frac{1}{e}\right)^n = 3(e^{-1})^n = 3e^{-n}.$$

3. Variations :

Propriété :

(u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme non nul u_0 .

Pour $u_0 > 0$:

- Si $q > 1$ alors la suite (u_n) est croissante.
- Si $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) est décroissante.

Pour $u_0 < 0$:

- Si $q > 1$ alors la suite (u_n) est décroissante.
- Si $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) est croissante.

Démonstration dans le cas où $u_0 > 0$:

Pour tout entier naturel ,

$$u_{n+1} - u_n = u_0 q^{n+1} - u_0 q^n = u_0 q^n (q - 1).$$

Comme $u_0 > 0$, $u_{n+1} - u_n$ est du signe de $q^n(q - 1)$

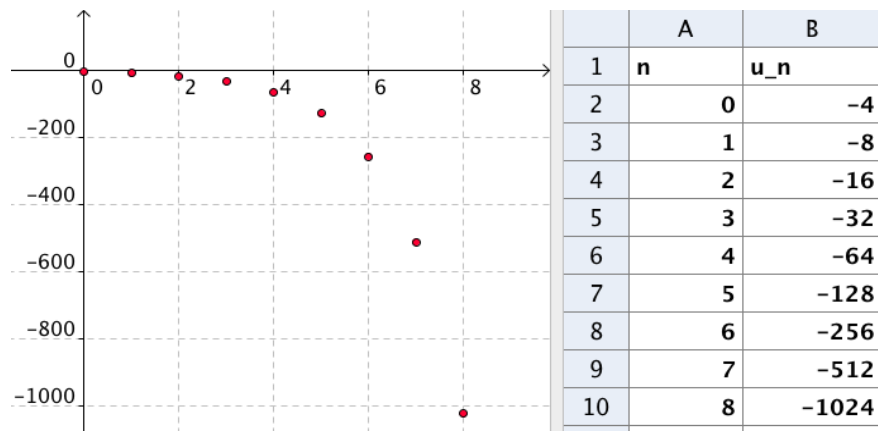
- Si $q > 1$ alors $q - 1 > 0$ et $q^n > 0$.Par conséquent, $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite (u_n) est croissante.
- Si $0 < q < 1$ alors $q - 1 < 0$ et $q^n > 0$.Par conséquent $u_{n+1} - u_n < 0$ et la suite (u_n) est décroissante.

Exemple :



Vidéo mathssa.fr/varsuitgeo (7mns)

La suite géométrique (u_n) définie par $u_n = -4 \times 2^n$ est décroissante car le premier terme est négatif et la raison est supérieure à 1.



Remarque : Si la raison q est négative alors la suite géométrique n'est pas monotone.

4. Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique :

Propriété :

Soit n un entier naturel non nul et q un réel différent de 1 alors on a :

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Remarque : Il s'agit de la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison q et de premier terme 1.

Démonstration au programme :

 Vidéo mathssa.fr/sommegeo (7mns30s)

$$S = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n$$

$$q \times S = q + q^2 + q^3 + q^4 + \dots + q^{n+1} \text{ Ainsi, par soustraction membre à membre}$$

$$S - q \times S = (1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n) - (q + q^2 + q^3 + q^4 + \dots + q^{n+1})$$

$$S - q \times S = 1 - q^{n+1}$$

$$S \times (1 - q) = 1 - q^{n+1} \quad (\text{or } 1 - q \neq 0)$$

$$S = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Application :

 Vidéo mathssa.fr/geom4 (7mns50s)

Calculer la somme S suivante : $S = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{13}$

$$S = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{13} = \frac{1 - 3^{13+1}}{1 - 3} = \frac{1 - 3^{14}}{-2} = 2\,391\,484$$

Propriété :

soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de 1^{er} terme u_0 .

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{u_0 - u_{n+1}}{1 - q} = \frac{\text{premier terme} - \text{terme qui suit le dernier}}{1 - \text{raison}}$$

Preuve :

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + u_n &= u_0 + u_0 \times q + u_0 \times q^2 + \dots + u_0 \times q^{n-1} + u_0 \times q^n \\ &= u_0 \times (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} + q^n) \\ &= u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \\ &= \frac{u_0 - u_0 q^{n+1}}{1 - q} \\ &= \frac{u_0 - u_{n+1}}{1 - q} \end{aligned}$$

Point méthode : calcul d'une somme dont les termes sont en progression géométrique

- On repère le 1^{er} terme, le dernier terme et la raison de la suite géométrique
- On détermine l'indice du dernier terme de la somme en résolvant une équation
- On applique la formule précédente

Exercice d'application :

Calculer la somme $S = 36 + 108 + 324 + \dots + 57\,395\,628$

- S est la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de 1^{er} terme 36 et de dernier terme 57 395 628 et de raison $q=3$.
- $S = \frac{36 - 57\,395\,628 \times 3}{1 - 3} = 86\,093\,424$

Problème :

Hervé souhaite faire creuser un puits au fond de son jardin et atteindre une nappe d'eau annoncée à 37 mètres de profondeur. Une entreprise lui propose le tarif suivant: 85 euros pour le premier mètre creusé, puis pour chaque mètre suivant, le mètre creusé est facturé 2% de plus que le mètre précédent.

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note u_n le prix du nième mètre creusé

1. Déterminer la nature de la suite (u_n) .
2. Exprimer u_n en fonction de n .
3. Déterminer combien Hervé devra payer si l'eau est effectivement à 37 mètres de profondeur.
4. Ecrire une fonction Python permettant de déterminer le prix à payer en fonction de n le nombre de mètres creusés.

1 Augmenter de 2% revient à multiplier par $1 + \frac{2}{100} = 1,02$

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $u_{n+1} = 1,02u_n$

La suite (u_n) est donc une suite **géométrique** de raison 1,02 et de premier terme $u_1 = 85$

2. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $u_n = u_1 q^{n-1} = 85 \times 1,02^{n-1}$.

3. On doit calculer $u_1 + \dots + u_{37} = \frac{u_1 - u_{38}}{1 - q}$

$$u_{38} = 85 \times 1,02^{37} \approx 176,86$$

$$u_1 + \dots + u_{37} = \frac{85 - 176,86}{1 - 1,02} \approx 4593$$

La facture est de 4593 €.

4

```
def prix(n):
    N=1
    U=85
    S=U
    for i in range(2,n+1):
        U=U*1.02
        S=S+U
    return(S)
```

```
*** Python 3.8.8
*** Distant Pytho
>>>
*** Console de pr
>>> prix(37)
4592.91163500758
>>>
```