CHAPITRE 13 – Variables aléatoires

En 1654, *Blaise Pascal* (1623 ; 1662) entretient avec *Pierre de Fermat* (1601 ; 1665) des correspondances sur le thème des jeux de hasard et d'espérance de gain qui les mènent à exposer une théorie nouvelle :
les calculs de probabilités.
Ils s'intéressent à la résolution de problèmes de dénombrement comme par exemple celui du *Chevalier de Méré* :
« Comment distribuer équitablement la mise à un jeu de hasard interrompu avant la fin ? »

LETTRE DE M. PASCAL A M. DE FERMAT

Le 29 juillet 1654.

Monsieur,

L'impatience me prend aussi bien qu'à vous et, quoy que je sois encore au lit, je ne puis m'empescher de vous dire que je receus hier au soir, de la part de M. de Carcavi, votre lettre sur les partys, que j'admire si fort que je ne puis vous le dire. Je n'ay pas le loisir de m'etendre, mais, en un mot, vous avez trouvé les deux partys des dez et des parties dans la parfaite justesse : j'en suis tout satisfait, car je ne doute plus maintenant que je ne sois dans la verité, apres la rencontre admirable où je me trouve avec vous.

J'admire bien davantage la methode des partys que celle des dez : j'avois vu plusieurs personnes trouver celle des dez, comme M. le Chevalier de Meré, qui est celuy qui m'a proposé ces questions, et aussi M. de Roberval : mais M. de Meré n'avoit jamais pu trouver la juste valeur des parties ny de biais pour y arriver, de sorte que je me trouvois seul qui eusse connu cette proportion.

Votre methode est tres-seure et est celle qui m'est la premiere venue à la pensée dans cette recherche ; mais parce que la peine des combinaisons est excessive, j'en ay trouvé un abregé et proprement une

382 ŒUVRES

autre methode bien plus courte et plus nette, que je voudrois pouvoir vous dire icy en peu de mots : car je voudrois desormais vous ouvrir mon cœur, s'il se pouvoit, tant j'ay de joie de voir notre rencontre. Je voy bien que la verité est la mesme à Tolose et à Paris[1].

Voicy à peu prés comme je fais pour sçavoir la valeur de chacune des parties, quand deux joüeurs joüent, par exemple, en trois parties, et chacun a mis 32 pistoles au jeu :

Posons que le premier en ait deux et l'autre une ; ils joüent maintenant une partie, dont le sort est tel que, si le premier la gagne, il gagne tout l'argent qui est au jeu, savoir, 64 pistoles ; si l'autre la gagne, ils sont deux parties à deux parties, et par consequent, s'ils veulent se separer, il faut qu'ils retirent chacun leur mise, sçavoir, chacun 32 pistoles.

mathssa.fr/pascal (de 1h12mns44s à 1h16mns11s puis jusqu'à 1h21mns)

I- Variable aléatoire et loi de probabilité

Vidéo : mathssa.fr/va jusqu'à 11mns

1.Variable aléatoire

Exemple :
Soit l'expérience aléatoire : "On lance un dé à six faces et on regarde le résultat."
L'ensemble de toutes les issues possibles $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ s'appelle l'univers des possibles.
On considère l'événement A : "On obtient un résultat pair."
On a donc : $A = \{2 ; 4 ; 6\}$.
On considère l'événement élémentaire E : "On obtient un 3".
On a donc : $E = \{3\}$.

Définitions :

- Chaque résultat d'une expérience aléatoire s'appelle une issue.
- L'**univers des possibles Ω** est l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire.
- Un **événement** est un sous-ensemble de l'univers des possibles.
- Un **événement élémentaire** est un événement contenant une seule issue.

Exemple :

Dans l'expérience précédente, on considère le jeu suivant :

- Si le résultat est pair, on gagne 2€.
- Si le résultat est 1, on gagne 3€.
- Si le résultat est 3 ou 5, on perd 4€.

On a défini ainsi une variable aléatoire X sur Ω = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6} qui peut prendre les valeurs …………

On a donc : X(1) =…, X(2) = …, X(3) = …, X(4) = …, X(5) = …, X(6) = … .

Définition :

Une **variable aléatoire** X est une ………….. définie sur un univers Ω et à valeur dans ℝ.

2.Loi de probabilité

Exemple : On considère la variable aléatoire X définie dans l'exemple précédent.

Chaque issue du lancer de dé est équiprobable et égale à $\frac{1}{6}$.

La probabilité que la variable aléatoire prenne la valeur 2 est égale à **…**.

On note : P(X = 2) = **….**. De même : P(X = 3) = **…** et P(X = –4) = **… ..**

On peut résumer les résultats dans un tableau :

x_i			
P(X = x_i)			

Ce tableau résume **la loi de probabilité** de la variable aléatoire X.

Définition :

Soit une variable aléatoire X définie sur un univers Ω et prenant les valeurs $x_1, x_2, ..., x_n$.

La **loi de probabilité** de X associe à toute valeur x_i la probabilité P(X = x_i).

La loi de probabilité se représente sous la forme d'un tableau :

valeurs possibles x_i	x_1	x_2	…	x_n
Probabilités P(X = x_i)	P(X =x_1)	P(X =x_2)	…	P(X =x_n)

Remarques :
- $P(X = x_i)$ peut se noter p_i.
- $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$

Exemple :Dans l'exemple traité plus haut : $p_1 + p_2 + p_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 1$.

Exemple 1:

On lance un dé équilibré. On se donne le jeu suivant :on gagne 1 € si on tombe sur un nombre impair , gagne 3 € si on tombe sur 2 ou 4 et on perd 5 € si on tombe sur 6. On appelle X le gain algébrique du joueur

1. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
2. Calculer P(X>0)
3. Un joueur joue un très grand nombre de fois à ce jeu. Avec quelle fréquence gagne t'il 1€ , 3€ ou perd t'il 5€ ? Quelle est son gain moyen sur l'ensemble des parties ?

1.Les valeurs prises par la variable aléatoire X sont :…………………….

Les probabilités associées sont P(X=…)= ...   P(X=…)= ...   P(X=…)= ...

valeurs possibles x_i			
Probabilités $P(X = x_i)$			

2 P(X>0)= ………………………………………………………………

3 Si on joue un très grand nombre de fois à ce jeu, on gagne 1€ avec une fréquence de ..., 3€ avec une fréquence de ... $et\ on$ perd 5€ avec une fréquence de ....Le gain moyen espéré est :

… …

Exemple 2:

Soit l'expérience aléatoire : "On tire une carte dans un jeu de 32 cartes."

On considère le jeu suivant :

- Si on tire un cœur, on gagne 2€.
- Si on tire un roi, on gagne 5€.
- Si on tire une autre carte, on perd 1€.

On appelle X la variable aléatoire qui à une carte tirée associe un gain ou une perte.

Déterminer la loi de probabilité de X.

Les valeurs prises par la variable aléatoire X sont :………………………..

Les probabilités associées sont …………………………………………………………………..

valeurs possibles x_i			
Probabilités $P(X = x_i)$			

II- Espérance , variance et écart-type

Vidéos : mathssa.fr/va (11mns à 17mns) et mathssa.fr/introva (12mns)

1. Espérance mathématique d'une variable aléatoire :

Définition :
On se donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire X

valeurs possibles x_i	x_1	x_2	…	x_n
probabilités $P(X=x_i)$	$P(X=x_1) = p_1$	$P(X=x_2) = p_2$	…	$P(X=x_n) = p_n$

L'**espérance mathématique** de la variable aléatoire X est donnée par la formule :

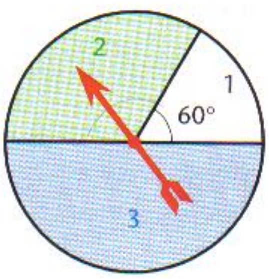
$$E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \ \dots + p_nx_n = \sum_{i=1}^{n} p_ix_i$$

Remarques :
- L'espérance est la moyenne de la série des x_i pondérés par les probabilités p_i.
En effet : E(X) = $p_1x_1 + p_2x_2 + \ \dots + p_nx_n = \frac{p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}$
En répétant un grand nombre de fois l'expérience, la loi des grands nombres nous permet d'affirmer que les fréquences se rapprochent des probabilités théoriques.
La moyenne des résultats se rapprochent donc de l'espérance de la loi de probabilité.
L'espérance est donc la moyenne que l'on peut espérer si l'on répète l'expérience un grand nombre de fois.

Autrement dit : ESPERANCE =………………………………..
-Dans le cas d'un jeu, l'espérance correspond au …………………………………………………………
………………………………………………………..
Si l'espérance est nulle, le jeu est dit …………………………………..
Si l'espérance est strictement positive, le jeu est dit ……………………………………..
Si l'espérance est strictement négative, le jeu est dit ……………………………………..

Exemple 1 :

35 La variable aléatoire X prend pour valeur le gain 1, 2 ou 3 obtenu avec la roulette ci-contre.
1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. a) Calculer l'espérance de X.
b)Interpréter ce nombre.



1.

valeurs possibles x_i			
Probabilités P(X = x_i)			

2.a) $E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

b)...

....

Exemple 2:

Soit X la variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée ci –dessous :

valeurs possibles x_i	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
probabilités *P(X=x_i)*	$\frac{1}{12}$	a	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$

Calculer a puis déterminer l'espérance de X.

$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$. Donc ....

....

....

2.Variance et écart-type :

Définitions :

Soit une variable aléatoire X définie sur un univers Ω et prenant les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
La loi de probabilité de X associe à toute valeur x_i la probabilité $p_i = P(X = x_i)$.

- La variance de la loi de probabilité de X est :

$$V(X) = p_1\left(x_1 - E(X)\right)^2 + p_2\left(x_2 - E(X)\right)^2 + \ldots + p_n\left(x_n - E(X)\right)^2 \left(= \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - E(X))^2\right)$$

- L'écart-type de la loi de probabilité de X est :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Remarque :

- Il existe une autre formule pour la variance : $V(X) = p_1{x_1}^2 + p_2{x_2}^2 + \ldots + p_n{x_n}^2 - E(X)^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - E(X)^2$
- L'espérance et l'écart-type ont la même unité que celle des valeurs x_i

L'écart-type est donc une caractéristique de dispersion "espérée" pour la loi de probabilité de la variable

<u>Exemple 1:</u>

Soit l'expérience aléatoire : "On tire une carte dans un jeu de 32 cartes."

On considère le jeu suivant :

- Si on tire un cœur, on gagne 2€.
- Si on tire un roi, on gagne 5€.
- Si on tire une autre carte, on perd 1€.

On appelle X la variable aléatoire qui à une carte tirée associe un gain ou une perte.

Déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type de la variable aléatoire X.

valeurs possibles x_i	*-1*	*2*	*5*	*7*
Probabilités P(X = x_i)	$\frac{21}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{32}$

$E(X) =$ …

$V(X) =$ …

$\sigma(X) = \sqrt{\frac{......}{.....}} \approx$ … …

<u>Exemple 2:</u>

<u>Jeu 1 :</u> pour une mise de 2 €, un joueur peut :perdre sa mise avec une probabilité $\frac{1}{2}$, gagner 4 € avec une probabilité $\frac{3}{8}$ ou gagner 10€ avec une probabilité de $\frac{1}{8}$.

<u>Jeu 2 :</u> un joueur mise 100 euros au pile ou face. Si il obtient pile , il double sa mise sinon il la perd.

On appellera X le **gain algébrique** du joueur. Comparer ces deux jeux.

Jeu1

valeurs possibles x_i	*-2*	*2*	*8*
Probabilités P(X = x_i)	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$E(X) =$ …

$V(X) =$ …

$\sigma(X) = \sqrt{\frac{......}{.....}} \approx$ … …

Jeu2

valeurs possibles x_i	*100*	*-100*
Probabilités P(X = x_i)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$E(X) =$ …

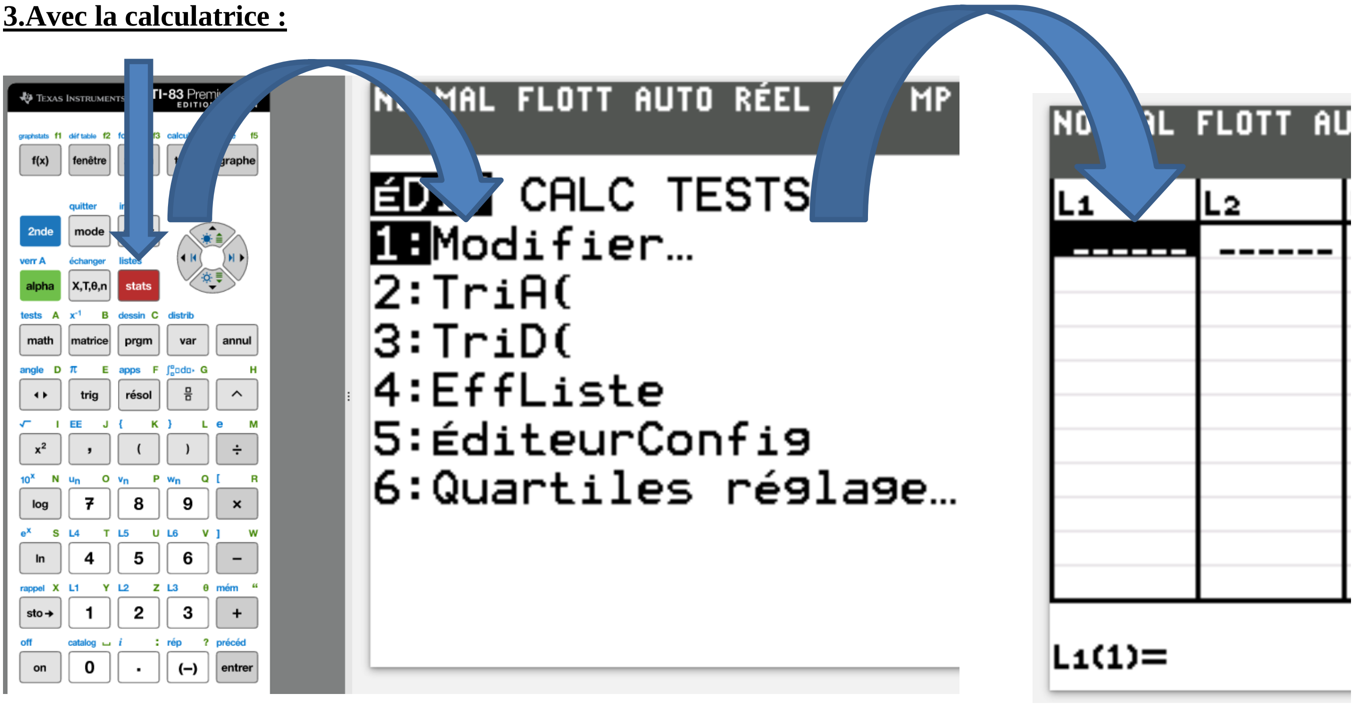
$V(X) =$ …

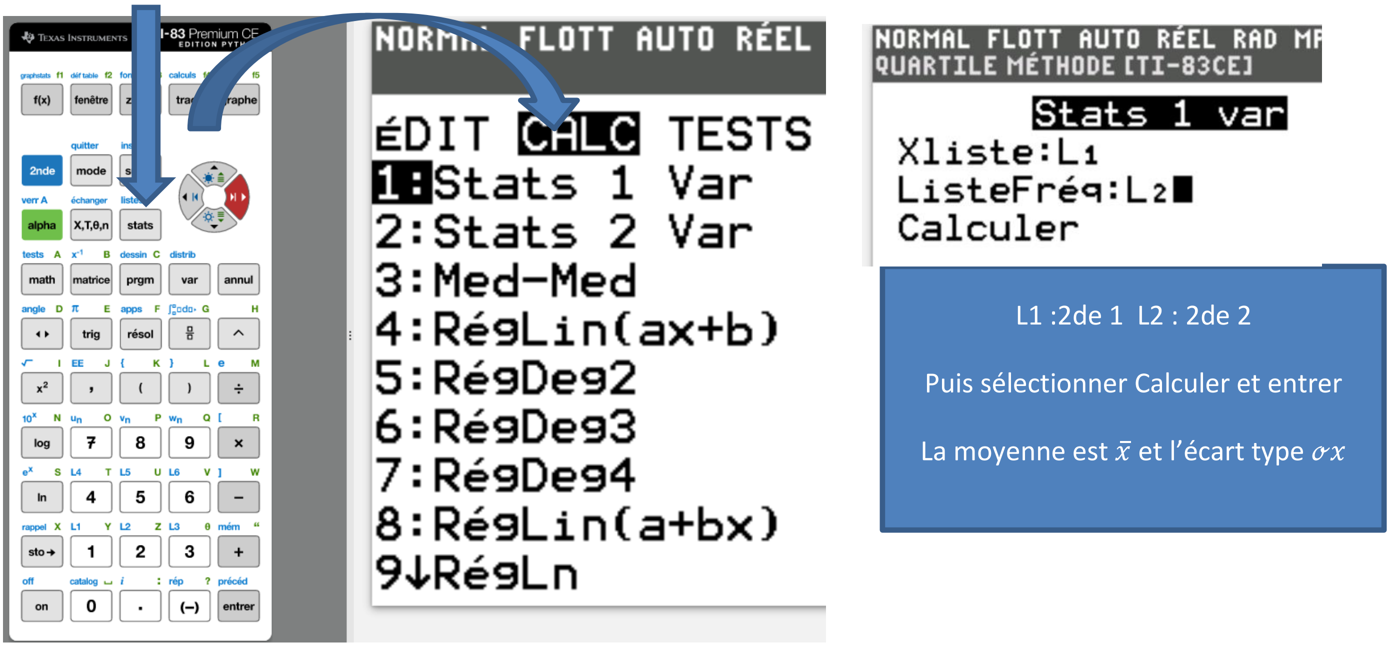
$\sigma(X) = \sqrt{\frac{......}{.....}} \approx$ … …

………

………

<u>3.Avec la calculatrice :</u>





Soit X la variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée ci –dessous :

valeurs possibles x_i	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
probabilités $P(X=x_i)$	0.1	*0.2*	0.3	0.1	0.1	0.2

Donner l'espérance et l'écart type de cette variable aléatoire.
L'espérance est ……………………. et l'écart type est à peu près …………..

4.Propriété de linéarité :

Vidéo : mathssa.fr/va (17mns jusqu'à 23 mns)

Propriétés :

Soit une variable aléatoire X définie sur un univers Ω.Soit a et b deux nombres réels.

On a : $E(aX+b) = aE(X)+b$ et $V(aX+b) = a^2V(X)$

Démonstrations :

$$E(aX+b) = \sum_{i=1}^{n} p_i(ax_i+b)$$
$$= a\sum_{i=1}^{n} p_i x_i + b\sum_{i=1}^{n} p_i$$
$$= a\sum_{i=1}^{n} p_i x_i + b \times 1$$
$$= aE(X)+b$$

$$V(aX+b) = \sum_{i=1}^{n} p_i\big(ax_i+b-(aE(X)+b)\big)^2$$
$$= \sum_{i=1}^{n} p_i\big(ax_i - aE(X)\big)^2$$
$$= a^2\sum_{i=1}^{n} p_i\big(x_i - E(X)\big)^2$$
$$= a^2V(X)$$

Exercice type : Simplifier les calculs d'espérance et de variance à l'aide d'une variable aléatoire de transition

Vidéo : mathssa.fr/va2 (13mns)

Une entreprise qui fabrique des roulements à bille fait une étude sur une gamme de billes produites. Le diamètre théorique doit être égal à 1,3 cm mais cette mesure peut être légèrement erronée.

L'expérience consiste à tirer au hasard une bille d'un lot de la production et à mesurer son diamètre.

On considère la variable aléatoire X qui à une bille choisie au hasard associe son diamètre.

La loi de probabilité de X est résumée dans le tableau suivant :

x_i	1,298	1,299	1,3	1,301	1,302
$P(X = x_i)$	0,2	0,1	0,2	0,4	0,1

Calculer l'espérance et l'écart-type de la loi de probabilité de X.

Pour simplifier les calculs, on définit la variable aléatoire $Y = 1000X - 1300$.

La loi de probabilité de Y est alors :

x_i					
$P(Y = x_i)$					

Calculons l'espérance et la variance de la loi de probabilité de Y :

$E(Y)$ = ………………………………………….

$V(Y)$ =…………………………………………..

On en déduit l'espérance et la variance de la loi de probabilité de X :

$E(Y) = E(1000X - 1300) = 1000\,E(X) - 1300$

Donc : $E(X) = \dfrac{E(Y)+1300}{1000}$ = **… … ..**

$V(Y) = V(1000X - 1300)$ = ……………

Donc : $V(X) = \dfrac{V(Y)}{1000^2}$ = ….. et et donc : $\sigma(X) = \sqrt{\dfrac{1,69}{1000^2}} = \dfrac{1,3}{1000}$ = 0,0013

Conclusion : $E(X)$ = 1,3001 cm et $\sigma(X) = 0,0013$ cm.