CHAPITRE 15 – Géométrie repérée

On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan.

I. Rappels sur les équations de droites

Rappels du cours de 2de en vidéo : mathssa.fr/equdroite

Critère de colinéarité :
Soit les vecteurs $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$.
On appelle déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ noté $\det(\vec{u},\vec{v})$ le réel : $\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} = \ldots\ldots\ldots.$
$\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u},\vec{v}) = \ldots$

Vecteur directeur d'une droite :
Un vecteur directeur d'une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ est $\vec{u}(\ldots\ ;\ldots)$.

Propriété :
Les droites d'équation $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ sont parallèles si et seulement si $\ldots\ldots\ldots$ = 0.

Méthode : Déterminer une équation de droite à partir d'un point et d'un vecteur directeur

Vidéos : mathssa.fr/equacart2 (3mns18s) et mathssa.fr/equacart3 (5mns)

On considère un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan.

1) Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par le point $A(3\ ;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}$ $(-1\ ;5)$.

2) Déterminer une équation cartésienne de la droite d' passant par les points $A(5\ ;3)$ et $B(1\ ;-3)$.

1.Ainsi, comme $\vec{u}$ $(\underbrace{-1}_{-b}\ ;\ \underbrace{5}_{a})$ est un vecteur directeur de d, une équation de d est de la forme :
$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Pour déterminer c, il suffit de substituer les coordonnées de A dans l'équation.
$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$
$c =\ \ldots\ldots\ldots\ldots$

d : $5x + 1y - 16 = 0$

2) A et B appartiennent à d' donc ……. est un vecteur directeur de d'.

On a : $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\underbrace{-4}_{-b}\ ;\underbrace{-6}_{a}\end{pmatrix}$

Une équation cartésienne de d' est de la forme : $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

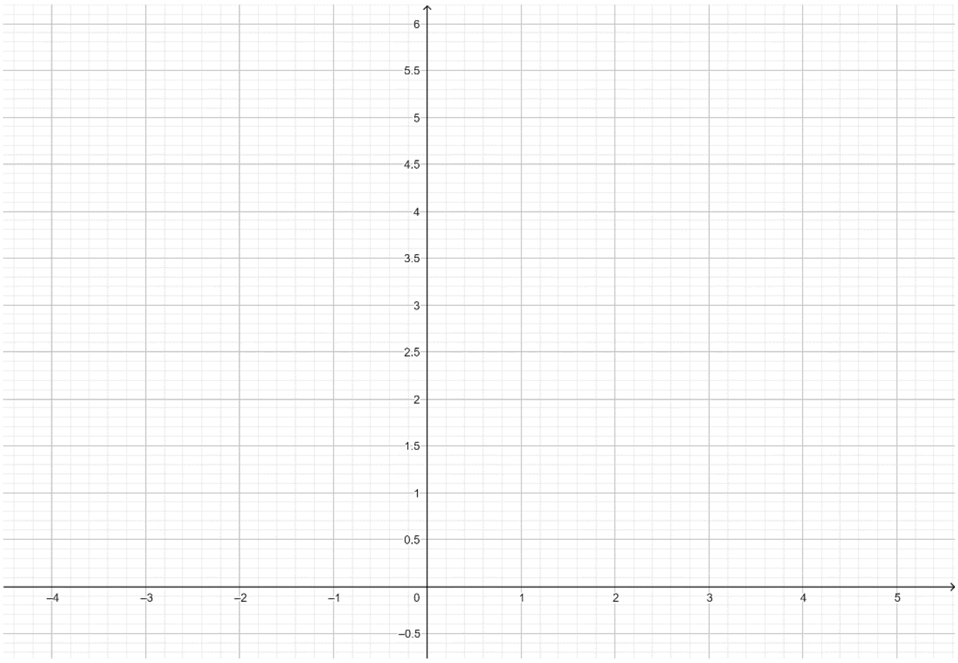
$A(5\ ;\ 3)$ appartient à d' donc : $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.

Une équation cartésienne de d' est : $-6x + 4y + 18 = 0$ ou encore $3x - 2y - 9 = 0$.

Méthode : Tracer une droite dont on connait une équation cartésienne

Vidéo : mathssa.fr/equacart4 (3mns44s)

Tracer la droite (d) d'équation cartésienne : $3x + 2y - 5 = 0$.



$a = 3 \quad b = 2$

Alors le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(-b\,;a)$ soit $(-2;3)$ est un ……………………………..

On remplace x par … … …

… … … … … … … ..

… … … … … … ..

… … … … … … …

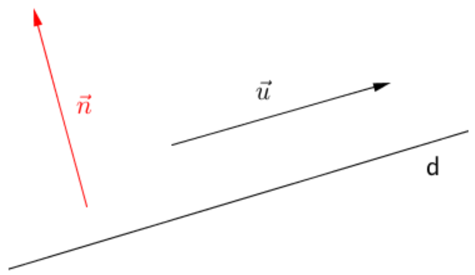
A(0 ;2,5) appartient à la droite (d)

(d) est la droite passant par A et vecteur directeur $\vec{u}(-2;5)$

II. Équation de droite de vecteur normal donné

Définition : Soit une droite *d*.

On appelle **vecteur normal** à une droite *d*, un vecteur non nul orthogonal à un vecteur directeur de *d*.



Exemple :

Soit la droite *d* d'équation cartésienne $2x - 3y - 6 = 0$. $\quad a = 2 \quad b = -3 \quad c = -6$

Un vecteur directeur de *d* est : $\vec{u}(3\,;2)$.

Un vecteur normal $\vec{n}(a\,;b)$ de *d* est tel que : $\vec{u}.\vec{n} = 0$

Soit : $3a + 2b = 0$.

a = 2 et *b* = -3 conviennent, ainsi le vecteur $\vec{n}(2\,;-3)$ est un vecteur normal de *d*.

Propriétés :

- Une droite de vecteur normal $\vec{n}(a\,;b)$ admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$ où c est un nombre réel à déterminer.
- Réciproquement, la droite *d* d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ admet le vecteur $\vec{n}(a\,;b)$ pour vecteur normal.

<u>Démonstrations :</u>
- Soit un point A(x_A ; y_A) de la droite d.
M(x ; y) est un point de d si et seulement si $\overrightarrow{AM}(x - x_A ; y - y_A)$ et $\vec{n}(a ; b)$ sont orthogonaux.
Soit : $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$ Soit encore : $a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$
$ax + by - ax_A - by_A = 0$.
- Si $ax + by + c = 0$ est une équation cartésienne de d alors $\vec{u}(-b ; a)$ est un vecteur directeur de d.
Le vecteur $\vec{n}(a ; b)$ vérifie : $-b \times a + a \times b = 0$. Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux.

<u>Méthode :</u> Déterminer une équation de droite connaissant un point et un vecteur normal

Vidéo : mathssa.fr/vn 3mns47s
Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan, on considère la droite d passant par le point $A(-5 ; 4)$ et dont un vecteur normal est le vecteur $\vec{n}(3 ; -1)$.
Déterminer une équation cartésienne de la droite d.

Comme … … … … … … … … … … est un vecteur normal de d, une équation cartésienne de d est de la forme … … … … … … … … ….

Le point $A(-5 ; 4)$ appartient à la droite d, donc : … … … … … … … … … … … … … … … …. et donc : $c = 19$.
Une équation cartésienne de d est : $3x - y + 19 = 0$.

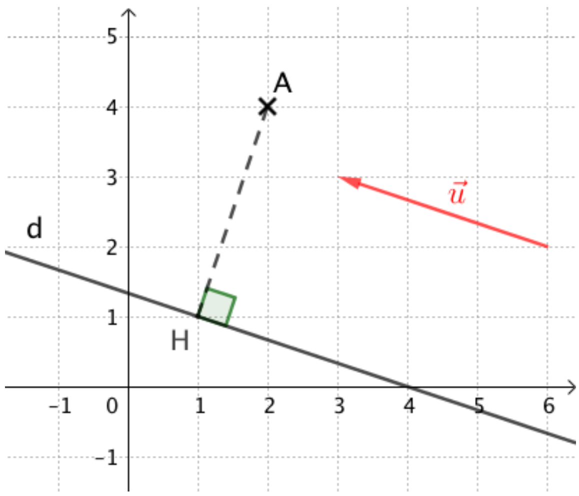
<u>Méthode :</u> Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite

Vidéo : mathssa.fr/vn2 9mns 35s
Soit la droite d d'équation $x + 3y - 4 = 0$ et le point A de coordonnées (2 ; 4).
Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de A sur la droite d.

- On commence par déterminer une équation de la droite (AH) :

Comme d et (AH) sont perpendiculaires, un vecteur directeur de d est un vecteur normal de (AH).
Une équation cartésienne de d est $x + 3y - 4 = 0$, donc le vecteur … … … … … .. est un vecteur directeur de d.
Et donc $\vec{u}(-3 ; 1)$ est un …………………….. de (AH).
Une équation de (AH) est de la forme
……………………

Or, le point A(2 ; 4) appartient à (AH), donc ses coordonnées vérifient l'équation de la droite.
On a : … … … … … … … … … … … … … … … … … … … ..
Une équation de (AH) est donc : $-3x + y + 2 = 0$.



- H est le point d'intersection de d et (AH), donc ses coordonnées $(x ; y)$ vérifient les équations des deux droites. Résolvons alors le système :

$\begin{cases} \text{… … … … … … … ..} \\ \text{… … … … … … … …} \end{cases}$ soit $\begin{cases} x = \text{… … … … ….} \\ \text{… … … … … … … … … … … ..} \end{cases}$ soit encore $\begin{cases} x = \text{… … … … ….} \\ \text{… … … … … … … … … … … ..} \end{cases}$

soit enfin $\begin{cases} x = \text{… … … … ….} \\ \text{… … … … … … … … … … … ..} \end{cases}$ et donc $\begin{cases} x = -3 \times 1 + 4 = 1 \\ y = 1 \end{cases}$. D'où H(1 ; 1).

III. Équations de cercle

Propriété : Une équation du cercle de centre $A(x_A\ ;\ y_A)$ et de rayon r est :
$(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=r^2$

Éléments de démonstration :Soit C le cercle de centre $A(x_A\ ;\ y_A)$ et de rayon r
Tout point $M(x\,;y)$ appartient à C si et seulement si $AM^2=r^2$
si et seulement si $(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=r^2$

Méthode : Déterminer une équation d'un cercle

Vidéo : mathssa.fr/equacercle1 3mns46s

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan, on considère le cercle C de centre $A(4\,;-1)$ et passant par le point $B(3\,;5)$.
Déterminer une équation du cercle C.

Commençons par déterminer le carré du rayon du cercle C :

$r^2=\cdots$ … … … … … … … … … … … … … … … … … …

Une équation cartésienne du cercle C est alors : … … … … … … … … … … … … … ..

Méthode : Déterminer les caractéristiques d'un cercle

Vidéo : mathssa.fr/equacercle2 8 mns

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan, on considère l'ensemble E d'équation :
$x^2+y^2-2x-10y+17=0$. Démontrer que l'ensemble E est un cercle dont on déterminera les caractéristiques (centre, rayon).

$x^2+y^2-2x-10y+17=0$

… … … … … … … … … … … … … … … … … … ..

… … … … … … … … … … … … … … … … … … ..

… … … … … … … … … … … … … … … … … … ..

… … … … … … … … … … … … … … … … … … ..

L'ensemble E est le cercle de centre le point de coordonnées …………… et de rayon ….