

CHAPITRE 15 – Géométrie repérée

On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

I. Rappels sur les équations de droites

Rappels du cours de 2de en vidéo : mathssa.fr/equdroite

Critère de colinéarité :

Soit les vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$.

On appelle déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ noté $\det(\vec{u}, \vec{v})$ le réel : $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$

$\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$

Vecteur directeur d'une droite :

Un vecteur directeur d'une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ est $\vec{u}(-b; a)$.

Propriété :

Les droites d'équation $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ sont parallèles si et seulement si $ab' - a'b = 0$.

Méthode : Déterminer une équation de droite à partir d'un point et d'un vecteur directeur

Vidéos : mathssa.fr/equacart2 (3mns18s) et mathssa.fr/equacart3 (5mns)

On considère un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

- 1) Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par le point $A(3; 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-1; 5)$.
- 2) Déterminer une équation cartésienne de la droite d' passant par les points $A(5; 3)$ et $B(1; -3)$.

1. Ainsi, comme $\vec{u}(\underbrace{-1}_{-b}; \underbrace{5}_a)$ est un vecteur directeur de d , une équation de d est de la forme :

$$5x + 1y + c = 0$$

Pour déterminer c , il suffit de substituer les coordonnées de A dans l'équation.

$$5 \times 3 + 1 + c = 0$$

$$c = -15 - 1 = -16$$

$$d : 5x + 1y - 16 = 0$$

2) A et B appartiennent à d' donc $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de d' .

On a : $\overrightarrow{AB}(1 - 5; -3 - 3)$ soit $\overrightarrow{AB}(\underbrace{-4}_{-b}; \underbrace{-6}_a)$

Une équation cartésienne de d' est de la forme : $-6x + 4y + c = 0$.

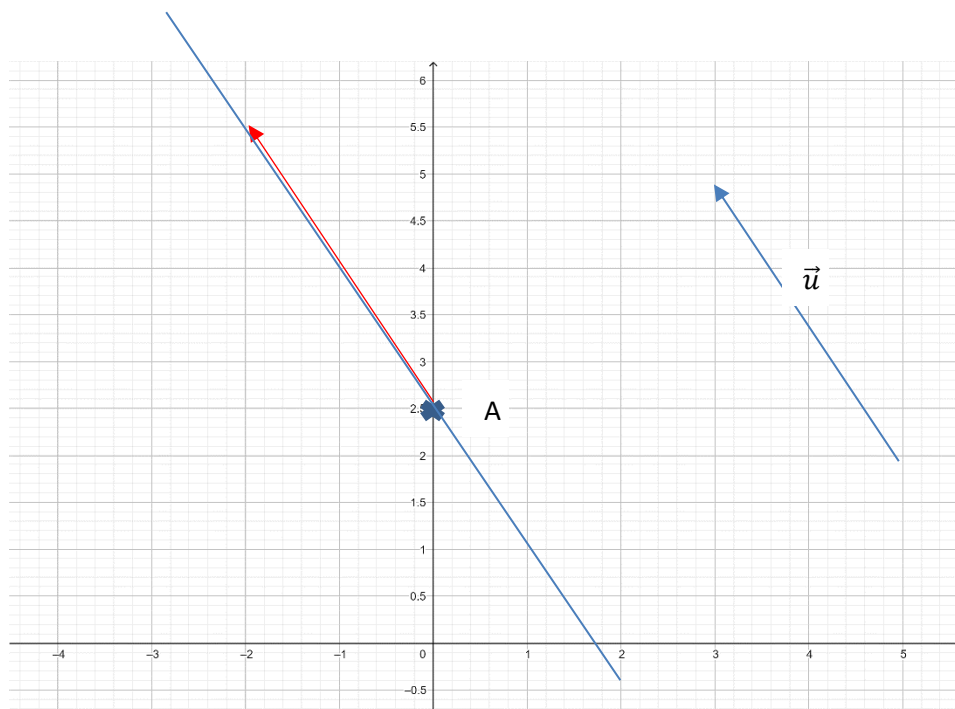
$$A(5; 3) \text{ appartient à } d' \text{ donc : } -6 \times 5 + 4 \times 3 + c = 0 \text{ soit } c = 30 - 12 = 18$$

Une équation cartésienne de d' est : $-6x + 4y + 18 = 0$ ou encore $3x - 2y - 9 = 0$.

Méthode : Tracer une droite dont on connaît une équation cartésienne

Vidéo : mathssa.fr/equacart4 (3mns44s)

Tracer la droite (d) d'équation cartésienne : $3x + 2y - 5 = 0$.



$$a = 3 \quad b = 2$$

Alors le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(-b; a)$ soit $(-2; 3)$ est un vecteur directeur de d .

On remplace x par 0.

$$3 \times 0 + 2y - 5 = 0$$

$$2y = 5$$

$$y = 2,5$$

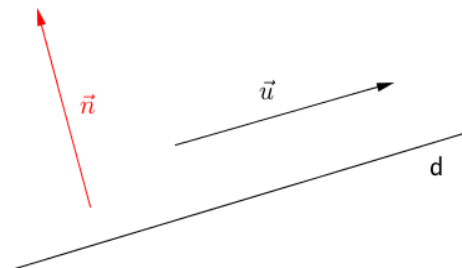
$A(0; 2,5)$ appartient à la droite (d)

(d) est la droite passant par A et vecteur directeur $\vec{u}(-2; 3)$

II. Équation de droite de vecteur normal donné

Définition : Soit une droite d .

On appelle **vecteur normal** à une droite d , un vecteur non nul orthogonal à un vecteur directeur de d .



Exemple :

Soit la droite d d'équation cartésienne $2x - 3y - 6 = 0$. $a = 2$ $b = -3$ $c = -6$

Un vecteur directeur de d est : $\vec{u}(3; 2)$.

Un vecteur normal $\vec{n}(a; b)$ de d est tel que : $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$

Soit : $3a + 2b = 0$.

$a = 2$ et $b = -3$ conviennent, ainsi le vecteur $\vec{n}(2; -3)$ est un vecteur normal de d .

Propriétés :

- Une droite de vecteur normal $\vec{n}(a; b)$ admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$ où c est un nombre réel à déterminer.

- Réciproquement, la droite d d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ admet le vecteur $\vec{n}(a; b)$ pour vecteur normal.

Démonstrations :

- Soit un point $A(x_A; y_A)$ de la droite d .

$M(x; y)$ est un point de d si et seulement si $\overrightarrow{AM}(x - x_A; y - y_A)$ et $\vec{n}(a; b)$ sont orthogonaux.

Soit : $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ Soit encore : $a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$

$$ax + by - ax_A - by_A = 0.$$

- Si $ax + by + c = 0$ est une équation cartésienne de d alors $\vec{u}(-b; a)$ est un vecteur directeur de d .

Le vecteur $\vec{n}(a; b)$ vérifie : $-b \times a + a \times b = 0$. Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux.

Méthode : Déterminer une équation de droite connaissant un point et un vecteur normal

Vidéo : mathssa.fr/vn 3mns47s

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan, on considère la droite d passant par le point $A(-5; 4)$ et dont un vecteur normal est le vecteur $\vec{n}(3; -1)$.

Déterminer une équation cartésienne de la droite d .

Comme $\vec{n}(3; -1)$ est un vecteur normal de d , une équation cartésienne de d est de la forme $3x - y + c = 0$

Le point $A(-5; 4)$ appartient à la droite d , donc : $3 \times (-5) - 4 + c = 0$ et donc :

$c = 19$. Une équation cartésienne de d est : $3x - y + 19 = 0$.

Méthode : Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite

Vidéo : mathssa.fr/vn2 9mns 35s

Soit la droite d d'équation $x + 3y - 4 = 0$ et le point A de coordonnées $(2; 4)$.

Déterminer les coordonnées du point H , projeté orthogonal de A sur la droite d .

- On commence par déterminer une équation de la droite (AH) :

Comme d et (AH) sont perpendiculaires, un vecteur directeur de d est un vecteur normal de (AH) .

Une équation cartésienne de d est $x + 3y - 4 = 0$, donc le vecteur $\vec{u}(-3; 1)$ est un vecteur directeur de d .

Et donc $\vec{u}(-3; 1)$ est un vecteur normal de (AH) .

Une équation de (AH) est de la forme

$$-3x + y + c = 0.$$

Or, le point $A(2; 4)$ appartient à (AH) , donc ses coordonnées vérifient l'équation de la droite.

On a : $-3 \times 2 + 4 + c = 0$ soit $c = 2$.

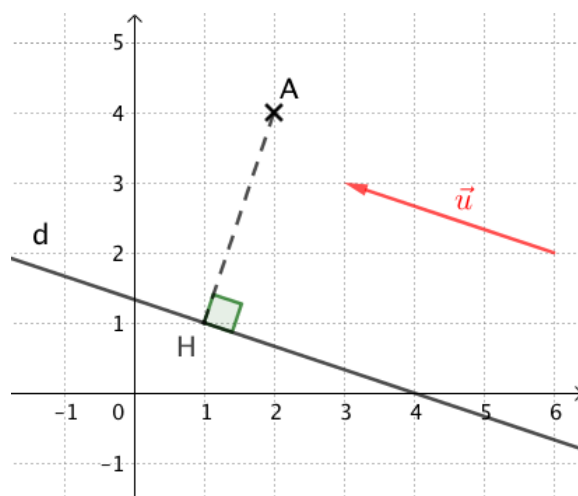
Une équation de (AH) est donc : $-3x + y + 2 = 0$.

- H est le point d'intersection de d et (AH) , donc ses coordonnées $(x; y)$ vérifient les équations des deux droites. Résolvons alors le système :

$$\begin{cases} x + 3y - 4 = 0 \\ -3x + y + 2 = 0 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x = -3y + 4 \\ -3(-3y + 4) + y + 2 = 0 \end{cases} \text{ soit encore } \begin{cases} x = -3y + 4 \\ 10y - 10 = 0 \end{cases}$$

$$\text{soit enfin } \begin{cases} x = -3y + 4 \\ y = \frac{10}{10} = 1 \end{cases} \text{ et donc } \begin{cases} x = -3 \times 1 + 4 = 1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Le point H , projeté orthogonal de A sur la droite d , a pour coordonnées $(1; 1)$.



III. Équations de cercle

Propriété : Une équation du cercle de centre $A(x_A ; y_A)$ et de rayon r est :

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2$$

Éléments de démonstration : Soit C le cercle de centre $A(x_A ; y_A)$ et de rayon r

Tout point $M(x ; y)$ appartient à C si et seulement si $AM^2 = r^2$

$$\text{si et seulement si } (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2$$

Méthode : Déterminer une équation d'un cercle

Vidéo : mathssa.fr/equacercle1 3mns46s

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan, on considère le cercle C de centre $A(4 ; -1)$ et passant par le point $B(3 ; 5)$.

Déterminer une équation du cercle C .

Commençons par déterminer le carré du rayon du cercle C :

$$r^2 = AB^2 = (3 - 4)^2 + (5 - (-1))^2 = 37$$

Une équation cartésienne du cercle C est alors : $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 37$.

Méthode : Déterminer les caractéristiques d'un cercle

Vidéo : mathssa.fr/equacercle2 8 mns

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan, on considère l'ensemble E d'équation :

$x^2 + y^2 - 2x - 10y + 17 = 0$. Démontrer que l'ensemble E est un cercle dont on déterminera les caractéristiques (centre, rayon).

$$x^2 + y^2 - 2x - 10y + 17 = 0$$

$$(x^2 - 2x) + (y^2 - 10y) + 17 = 0$$

$$(x - 1)^2 - 1 + (y - 5)^2 - 25 + 17 = 0$$

$$(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 9$$

$$(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 3^2$$

L'ensemble E est le cercle de centre le point de coordonnées $(1 ; 5)$ et de rayon 3.