CHAPITRE 1 – LE SECOND DEGRE 1ère partie

Ce chapitre présente les trois formes sous lesquelles peut écrire une fonction du second degré…

I – Fonction polynôme du second degré

Définition : On appelle **fonction polynôme de degré 2** toute fonction *f* définie sur ℝ par une expression de la forme :

$$f(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

où les coefficients a, b et c sont des réels donnés avec $a \neq 0$.

Vidéo : mathssa.fr/seconddegre (de 0 à 3mns30s)

Remarque :
Une fonction polynôme de degré 2 s'appelle également fonction trinôme du second degré ou par abus de langage "trinôme".

Exemples et contre-exemples :

- $f(x) = 3x^2 - 7x + 3$ ………….. une fonction polynôme du second degré
- $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x + \frac{3}{5}$ ………….. une fonction polynôme du second degré
- $h(x) = 4 - 2x^2$ ………….. une fonction polynôme du second degré
- $k(x) = (x - 4)(5 - 2x)$ ………….. une fonction polynôme du second degré
- $m(x) = 5x - 3$ ………….. une fonction polynôme du second degré ……………………
- $n(x) = 5x^4 - 7x^3 + 3x - 8$ est une fonction polynôme de degré ….

II – Fonction polynôme du second degré sous forme factorisée

1.Racines – forme factorisée :

Définition :
Soit f une **fonction polynôme de degré 2** . Les racines de ce polynôme, si elles existent, sont les solutions de l'équation … … ….

Exemples : soit $f(x) = x^2 - 3x$. f est bien une fonction polynome du second degré($a = \dots, b = \cdots, c = \cdots$)
$f(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots.. = \dots\dots\dots\dots$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \dots\dots\ ou\ x = \dots..$

$\Leftrightarrow x = \dots\ ou\ x = \dots$

Les racines du polynôme f sont $0\ et\ 3$.
soit $f(x) = 4x^2 - 1$. f est bien une fonction polynome du second degré ($a = \dots, b = \dots, c = \dots$)
$f(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \dots \Leftrightarrow x = \dots .ou\ x = \dots$
Les racines du polynôme f sont … … … … … ….

Propriété :
Soit f une **fonction polynôme de degré 2** dont l'expression est $f(x) = ax^2 + bx + c$ ayant deux racines distinctes $x_1\ et\ x_2$. Alors, f peut s'écrire sous la **forme factorisée** : $f(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots..$

Non exigible !

DÉMONSTRATION Soit f une fonction polynôme de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ ayant deux racines distinctes x_1 et x_2. Puisque x_1 est racine de ce polynôme, on a $f(x_1) = 0$, soit $ax_1^2 + bx_1 + c = 0$, soit $c = -ax_1^2 - bx_1$.

Alors $f(x) = ax^2 + bx - ax_1^2 - bx_1 = ax^2 - ax_1^2 + bx - bx_1 = a(x^2 - x_1^2) + b(x - x_1)$

$f(x) = a(x - x_1)(x + x_1) + b(x - x_1) = (x - x_1)(a(x + x_1) + b)$. **(1)**

Puisque x_2 est racine de ce polynôme, on a $f(x_2) = 0$, soit $(x_2 - x_1)(a(x_2 + x_1) + b) = 0$.

Comme $x_1 \neq x_2$, on a : $a(x_2 + x_1) + b = 0$, soit $b = -a(x_2 + x_1)$. **(2)**

On reporte dans **(1)** : $f(x) = (x - x_1)(a(x + x_1) - a(x_2 + x_1)) = a(x - x_1)(x + x_1 - x_2 - x_1)$.

On en déduit : $f(x) = a\,(x - x_1)(x - x_2)$.

Exemples :

soit f une fonction polynôme du second degré de racines 2 et 5.
Alors une expression de $f(x)$ est $f(x) =$ … … … … … … …
soit f une fonction polynôme du second degré de racines 0 et -3.
Alors une expression de $f(x)$ est $f(x) =$ … … … … … … = … … … … … ..

Exercice : expression factorisée à l'aide de deux racines

f est la fonction polynôme du second degré de racines -2 et 4 telle que $f(2) = -2$.
Déterminer $f(x)$.
$f(x)$ s'écrit sous la forme $f(x) = a$ … … … … … … … … $= a$ … … … … … ….
$f(2) = -2 \Leftrightarrow$ … … … … … … … … ..
$\Leftrightarrow$ … … … … ….
$\Leftrightarrow$ … … … … … … $f(x) =$ … … … … … …

Enigme : factoriser le polynôme du second degré $f(x) = 2x^2 + 12x - 14$.

2.Somme et produit des racines

Soit f un polynôme du second degré dont l'expression factorisée est $f(x) = 3(x-2)(x-5)$

Les racines sont … et …. La somme des racines est S=… et le produit est P=….	Valeurs de a, b et c. $f(x) = 3(x-2)(x-5)$ $= 3(x^2$ … … … … … …) $= 3($… … … … … …) $=$ … … … … … … … $a =$ …, $b =$ …., $c =$ ….

Conjecture : $S =$ … … … et $P =$ … … ..

Propriété :
Soit f une **fonction polynôme de degré 2** dont l'expression est $f(x) = ax^2 + bx + c$ ayant deux racines distinctes x_1 et x_2. Alors, la somme des racines est $S =$ … … .. et le produit des racines est $P =$ ….

Preuve :

Prenons une fonction du second degré sous sa **forme factorisée** : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
Appelons S la somme des racines S=x_1+x_2 et P leur produit $P = x_1x_2$
Développons $f(x)$.

$f(x) = a(x \times x - x \times x_2 - x_1 \times x + x_1 \times x_2)$
$= a(x^2 - x_2x - x_1x + x_1x_2)$
$= a(x^2 - (x_2 + x_1)x + x_1x_2)$
$= a(x^2 - Sx + P)$
$= ax^2 - aSx + aP$ or $f(x) = ax^2 + bx + c$

On a donc $-aS = b$ et $aP = c$ soit $S = -\frac{b}{a}$ et $P = \frac{c}{a}$ $(a \neq 0)$

Retour sur l'énigme : factoriser le polynôme du second degré $f(x) = 2x^2 + 12x - 14$.
1 est une racine évidente de f car $f(1)$ … … … … … … … . .
Soit $x_2$la deuxième racine.
On a $S =$ … … et $P =$ ….. D'où … … … . . = … … … … .. et … … … … … = … … … …..
Soit encore $x_2 =$ ….
$f(x) = 2(\dots\dots..)(\dots\dots\dots.)$

Exercice : factoriser le polynôme du second degré $f(x) = 3x^2 - 2x - 8$.

<u>3.Signe d'un polynôme du second degré sous forme factorisée</u>

Soit f un polynôme du second degré dont l'expression factorisée est $f(x) = 3(x-2)(x+5)$
Déterminons le signe de $f(x)$.

Le signe de $3(x-2)(x+5)$ dépend du signe de chaque facteur $x - 2$ *et* $x + 5$.

$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x =$ … $x + 5 = 0 \Leftrightarrow x =$ …

x	-∞	….	…	+∞
$x-2$				
$x+5$				
$(x-2)(x+5)$				

Rappel : les fonctions affines 1x-2 et 1x+5 ont un coefficient directeur de 1 et sont donc ……………. .

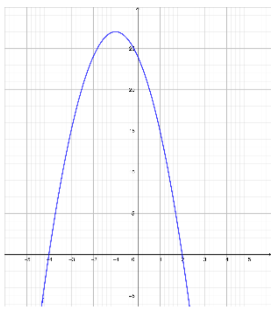
Il ne reste plus qu'à tenir compte du signe du coefficient a .Ici $a > 0$ donc le tableau de signe reste inchangé.
Si a étant négatif, les signes seraient inversés.
Et si on généralise avec le polynôme $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ (avec $x_1 < x_2$)

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$x - x_1$				
$x - x_2$				
$f(x)$				

<u>Propriété :</u> Soit f une **fonction polynôme de degré 2** dont l'expression est $f(x) = ax^2 + bx + c$ ayant deux racines distinctes x_1 *et* x_2. Alors, le polynôme f est du signe de a « …………………………………….. » (et du signe de $-a$ …………………….)

Application : résoudre l'inéquation suivante : $(-3x + 6)(x + 4) > 0$
On pose $f(x) = (-3x + 6)(x + 4)$
$= -3(\dots\dots\dots)(x + 4)$ *(on factorise par -3 dans l'expression $-3x + 6$)*
f est un polynôme du second degré dont les racines sont … et …. et le coefficient a =…
f est du signe de a à ………………………………… On en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		



$f(x) > 0 \Leftrightarrow x$ … … … … …. $S =$ … … ..

III– Fonction polynôme du second degré sous forme canonique

Vidéo :mathssa.fr/seconddegre (3mns30s à 7 mns)

Propriété :
Pour tout polynome du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$, il existe deux réels α et β tels que
$ax^2 + bx + c =$ … … … … … … …
L'expression … … … … … … …. est la forme canonique du polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$

Non exigible !

DÉMONSTRATION Soit la fonction polynôme f telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a est un réel non nul.

En mettant le coefficient a en facteur, on obtient : $ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$

On peut considérer $x^2 + \frac{b}{a}x$ comme le début du développement du carré de $\left(x + \frac{b}{2a}\right)$:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} \text{ d'où } x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}$$

D'où : $f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$

$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$ (après réduction au même dénominateur)

$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ (en notant Δ le réel $b^2 - 4ac$)

$f(x) = a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{-\Delta}{4a}\right)$ soit $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = \frac{-\Delta}{4a}$.

Exemple : $f(x) = x^2 + 2x + 3 = x^2 + 2x +$ … $+ 2 =$ … … … … … . . $=$ … … … … ….

$a =$ …. , $\alpha =$ … , $\beta =$ ….

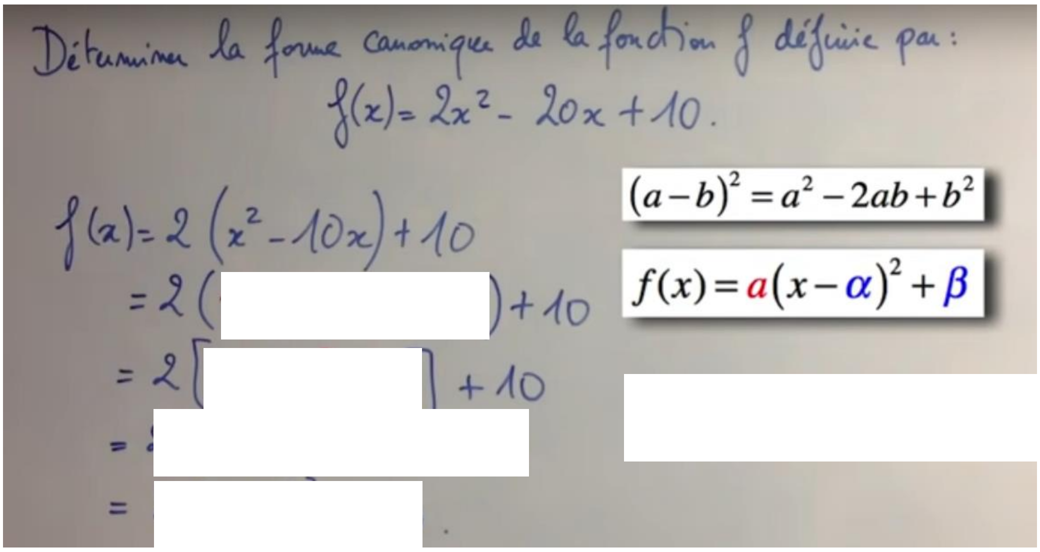
Définition :
soif f la fonction polynôme du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$. (a non nul)
On appelle **discriminant** de f le réel $\Delta =$ … … … …..

Propriété :
$\alpha =$ … … … et $\beta =$ … … …. .
La forme canonique du polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$ est: $ax^2 + bx + c = a(x +$ ….$)^2 -$ … … .

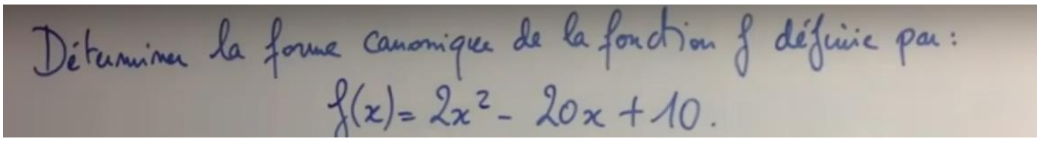
Remarque : $ax^2 + bx + c = a\left((x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$.

Vidéos : mathssa.fr/canonique1 (6mns) et mathssa.fr/canonique2 (11mns)

Exercice : déterminer la forme canonique à l'aide des identités remarquables



Exercice : déterminer la forme canonique à l'aide des formules



On identifie les coefficients a, b et c.

$a = \ldots, b = \ldots$ et $c = \ldots.$

On calcule le discriminant $\Delta = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots.$

$\alpha = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

et $\beta = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$

$ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)^2 + \beta$

$2x^2 - 20x + 10 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$