

CHAPITRE 1 – LE SECOND DEGRE 1^{ère} partie

Ce chapitre présente les trois formes sous lesquelles peut écrire une fonction du second degré...

I – Fonction polynôme du second degré

Définition : On appelle **fonction polynôme de degré 2** toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où les coefficients a , b et c sont des réels donnés avec $a \neq 0$.

Vidéo : mathssa.fr/seconddgre (de 0 à 3mns30s)

Remarque :

Une fonction polynôme de degré 2 s'appelle également fonction trinôme du second degré ou par abus de langage "trinôme".

Exemples et contre-exemples :

- $f(x) = 3x^2 - 7x + 3$

- $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x + \frac{3}{5}$

- $h(x) = 4 - 2x^2$

- $k(x) = (x - 4)(5 - 2x)$ sont des fonctions polynômes de degré 2.

- $m(x) = 5x - 3$ est une fonction polynôme de degré 1 (fonction affine).

- $n(x) = 5x^4 - 7x^3 + 3x - 8$ est une fonction polynôme de degré 4.

II – Fonction polynôme du second degré sous forme factorisée

1. Racines – forme factorisée :

Définition :

Soit f une **fonction polynôme de degré 2**. Les racines de ce polynôme, si elles existent, sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Exemples : soit $f(x) = x^2 - 3x$. f est bien une fonction polynôme du second degré ($a = 1, b = -3, c = 0$)

$$f(x) = x \times x - 3 \times x = (x - 3)x$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0 \text{ ou } x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } x = 0$$

Les racines du polynôme f sont 0 et 3.

soit $f(x) = 4x^2 - 1$. f est bien une fonction polynôme du second degré ($a = 4, b = 0, c = -1$)

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ ou } x = \frac{1}{2}$$

Les racines du polynôme f sont $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$.

Propriété :

Soit f une **fonction polynôme de degré 2** dont l'expression est $f(x) = ax^2 + bx + c$ ayant deux racines distinctes x_1 et x_2 . Alors, f peut s'écrire sous la **forme factorisée** : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

DÉMONSTRATION

Soit f une fonction polynôme de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ ayant deux racines distinctes x_1 et x_2 . Puisque x_1 est racine de ce polynôme, on a $f(x_1) = 0$, soit $ax_1^2 + bx_1 + c = 0$, soit $c = -ax_1^2 - bx_1$.
 Alors $f(x) = ax^2 + bx - ax_1^2 - bx_1 = ax^2 - ax_1^2 + bx - bx_1 = a(x^2 - x_1^2) + b(x - x_1)$
 $f(x) = a(x - x_1)(x + x_1) + b(x - x_1) = (x - x_1)(a(x + x_1) + b)$. (1)
 Puisque x_2 est racine de ce polynôme, on a $f(x_2) = 0$, soit $(x_2 - x_1)(a(x_2 + x_1) + b) = 0$.
 Comme $x_1 \neq x_2$, on a : $a(x_2 + x_1) + b = 0$, soit $b = -a(x_2 + x_1)$. (2)
 On reporte dans (1) : $f(x) = (x - x_1)(a(x + x_1) - a(x_2 + x_1)) = a(x - x_1)(x + x_1 - x_2 - x_1)$.
 On en déduit : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Exemples :

soit f une fonction polynôme du second degré de racines 2 et 5.

Alors une expression de $f(x)$ est $f(x) = a(x - 2)(x - 5)$.

soit f une fonction polynôme du second degré de racines 0 et -3.

Alors une expression de $f(x)$ est $f(x) = a(x - 0)(x - (-3)) = ax(x + 3)$.

Exercice : expression factorisée à l'aide de deux racines

f est la fonction polynôme du second degré de racines -2 et 4 telle que $f(2) = -2$.

Déterminer $f(x)$.

$f(x)$ s'écrit sous la forme $f(x) = a(x - (-2))(x - 4) = a(x + 2)(x - 4)$

$$f(2) = -2 \Leftrightarrow a(2 + 2)(2 - 4) = -2$$

$$\Leftrightarrow -8a = -2$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{-2}{-8} = \frac{1}{4}$$

$$f(x) = \frac{1}{4}(x + 2)(x - 4)$$

Enigme : factoriser le polynôme du second degré $f(x) = 2x^2 + 12x - 14$.

2. Somme et produit des racines

Soit f un polynôme du second degré dont l'expression factorisée est $f(x) = 3(x - 2)(x - 5)$

Les racines sont 2 et 5. La somme des racines est $S=7$ et le produit est $P=10$.	Valeurs de a, b et c . $f(x) = 3(x - 2)(x - 5)$ $= 3(x^2 - 5x - 2x + 10)$ $= 3(x^2 - 7x + 10)$ $= 3x^2 - 21x + 30$ $a = 3, b = -21, c = 30$
--	--

Conjecture : $S = -\frac{b}{a}$ et $P = \frac{c}{a}$

Propriété :

Soit f une **fonction polynôme de degré 2** dont l'expression est $f(x) = ax^2 + bx + c$ ayant deux racines distinctes x_1 et x_2 . Alors, la somme des racines est $S = -\frac{b}{a}$ et le produit des racines est $P = \frac{c}{a}$.

Preuve :

Prenons une fonction du second degré sous sa **forme factorisée** : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Appelons S la somme des racines $S = x_1 + x_2$ et P leur produit $P = x_1 x_2$

Développons $f(x)$.

$$f(x) = a(x \times x - x \times x_2 - x_1 \times x + x_1 \times x_2)$$

$$= a(x^2 - x_2 x - x_1 x + x_1 x_2)$$

$$= a(x^2 - (x_2 + x_1)x + x_1 x_2)$$

$$= a(x^2 - Sx + P)$$

$$= ax^2 - aSx + aP \text{ or } f(x) = ax^2 + bx + c$$

On a donc $-aS = b$ et $aP = c$ soit $S = -\frac{b}{a}$ et $P = \frac{c}{a}$ ($a \neq 0$)

Retour sur l'énigme : factoriser le polynôme du second degré $f(x) = 2x^2 + 12x - 14$.

1 est une racine évidente de f car $f(1) = 2 + 12 - 14 = 0$.

Soit x_2 la deuxième racine.

On a $S = -\frac{b}{a}$ et $P = \frac{c}{a}$. D'où $1 + x_2 = -\frac{12}{2} = -6$ et $1 \times x_2 = \frac{-14}{2} = -7$.

Soit encore $x_2 = -7$.

$f(x) = 2(x - 1)(x + 7)$

Exercice : factoriser le polynôme du second degré $f(x) = 3x^2 - 2x - 8$.

3. Signe d'un polynôme du second degré sous forme factorisée

Soit f un polynôme du second degré dont l'expression factorisée est $f(x) = 3(x - 2)(x + 5)$

Déterminons le signe de $f(x)$.

Le signe de $3(x - 2)(x + 5)$ dépend du signe de chaque facteur $x - 2$ et $x + 5$.

$$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5$$

x	$-\infty$	-5	2	$+\infty$	
$x - 2$	-	-	0	+	
$x + 5$	-	0	+	+	
$(x - 2)(x + 5)$	+	0	-	0	+

Rappel : les fonctions affines $1x-2$ et $1x+5$ ont un coefficient directeur de 1 et sont donc croissantes .

Il ne reste plus qu'à tenir compte du signe du coefficient a . Ici $a > 0$ donc le tableau de signe reste inchangé. Si a étant négatif, les signes seraient inversés.

Et si on généralise avec le polynôme $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ (avec $x_1 < x_2$)

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$x - x_1$	-	0	+	+	
$x - x_2$	-	-	0	+	
$f(x)$	Signe de a	0	Signe de $(-a)$	0	Signe de a

Propriété : Soit f une fonction polynôme de degré 2 dont l'expression est $f(x) = ax^2 + bx + c$ ayant deux racines distinctes x_1 et x_2 . Alors, le polynôme f est du signe de a « à l'extérieur des racines » (et du signe de $-a$ à l'intérieur)

Application : résoudre l'inéquation suivante : $(-3x + 6)(x + 4) > 0$

On pose $f(x) = (-3x + 6)(x + 4)$

$= -3(x - 2)(x + 4)$ (on factorise par -3 dans l'expression $-3x + 6$)

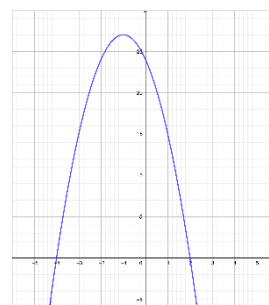
f est un polynôme du second degré dont les racines sont 2 et -4 et le coefficient $a = -3$.

f est du signe de a à l'extérieur des racines. On en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$	-4	2	$+\infty$	
$f(x)$	-	0	+	0	-

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in] -4 ; 2[$$

$$S =] -4 ; 2[$$



III– Fonction polynôme du second degré sous forme canonique

Vidéo : mathssa.fr/seconddegre (3mns30s à 7 mns)

Propriété :

Pour tout polynôme du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$, il existe deux réels α et β tels que $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta$

L'expression $a(x - \alpha)^2 + \beta$ est la forme canonique du polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$

Non exigible !

DÉMONSTRATION Soit la fonction polynôme f telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a est un réel non nul.

En mettant le coefficient a en facteur, on obtient : $ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$

On peut considérer $x^2 + \frac{b}{a}x$ comme le début du développement du carré de $(x + \frac{b}{2a})$:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} \text{ d'où } x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\text{D'où : } f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right]$$

$$f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] \text{ (après réduction au même dénominateur)}$$

$$f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] \text{ (en notant } \Delta \text{ le réel } b^2 - 4ac)$$

$$f(x) = a \left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{-\Delta}{4a}\right) \text{ soit } f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta \text{ avec } \alpha = \frac{-b}{2a} \text{ et } \beta = \frac{-\Delta}{4a}.$$

$$\text{Exemple : } f(x) = x^2 + 2x + 3 = x^2 + 2x + 1 + 2 = (x + 1)^2 + 2 = 1(x - (-1))^2 + 2$$

$$a = 1, \alpha = -1, \beta = 2$$

Définition :

soit f la fonction polynôme du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$. (a non nul)

On appelle **discriminant** de f le réel $\Delta = b^2 - 4ac$.

Vidéo : les maths en chanson : mathssa.fr/splendide (3 mns)

Propriété :

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = -\frac{\Delta}{4a}.$$

La forme canonique du polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$ est : $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$.

Remarque : $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$.

Vidéos : mathssa.fr/canonique1 (6mns) et mathssa.fr/canonique2 (11mns)

Exercice : déterminer la forme canonique à l'aide des identités remarquables

Déterminer la forme canonique de la fonction f définie par :

$$f(x) = 2x^2 - 20x + 10.$$

$$f(x) = 2(x^2 - 10x) + 10$$

$$= 2(x^2 - 10x + 25 - 25) + 10$$

$$= 2[(x-5)^2 - 25] + 10$$

$$= 2(x-5)^2 - 50 + 10$$

$$= 2(x-5)^2 - 40.$$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$

$$(x-5)^2 = x^2 - 10x + 25$$

Exercice : déterminer la forme canonique à l'aide des formules

Déterminer la forme canonique de la fonction f définie par :

$$f(x) = 2x^2 - 20x + 10.$$

On identifie les coefficients a, b et c .

$$a = 2, b = -20 \text{ et } c = 10.$$

$$\text{On calcule le discriminant } \Delta = b^2 - 4ac = (-20)^2 - 4 \times 2 \times 10 = 320$$

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-20}{4} = 5$$

$$\text{et } \beta = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{320}{8} = -40$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

$$2x^2 - 20x + 10 = 2(x - 5)^2 - 40$$