CHAPITRE 2 – DERIVATION 1ère partie

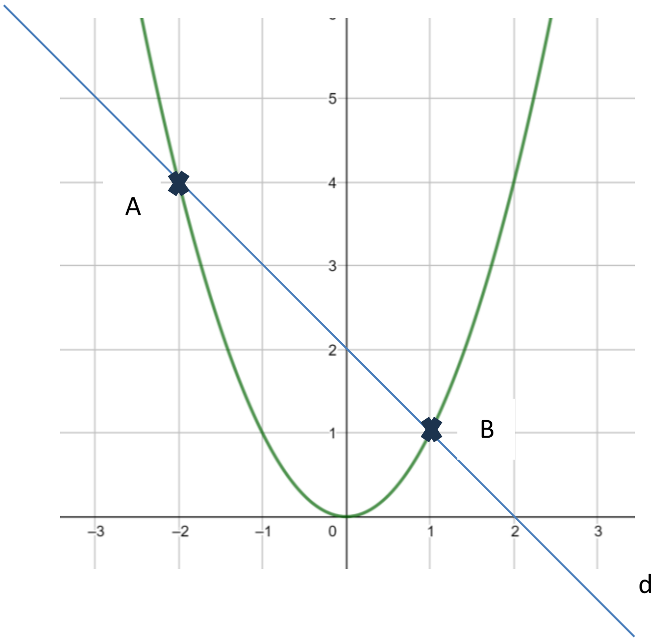
I – Dérivation - point de vue local

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , C sa courbe représentative dans un repère du plan.
h désigne un réel non nul et $a + h$ appartient à I.

1.Notion de sécante

Définition :
une sécante à la courbe C désigne une droite passant par …………………… de la courbe.

Exercice : déterminer l'équation de la sécante d à la courbe de la fonction carrée passant par les points A et B d'abscisse respective $-2\ et\ 1$. (cf activité faite en classe partie exercices)



Le coefficient directeur de d est :

m = … … … … … … … … … … … ….

L'équation de d est donc de la forme : … … … …..

Comme A$(-2; 4)$ appartient à la droite d, ses coordonnées vérifient l'équation de d soit :

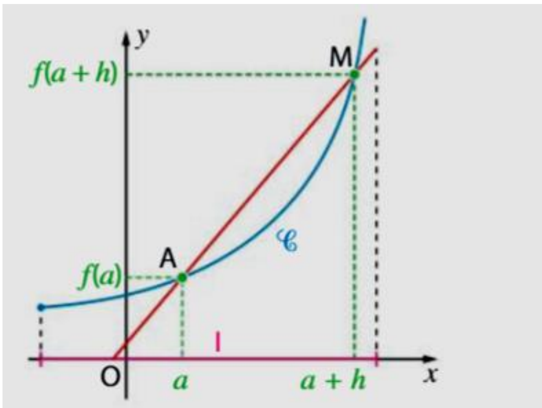
……………………………………….

Une équation de d est donc : … … … … … … …

Définition-propriété :
Le taux de variations de f entre a et $a + h$ est le nombre

$r(h) =$ … … … … … … … … … … .. .

Soit A le point de C d'abscisse a et M le point de C d'abscisse $a + h$.
Le taux de variations de f entre a et $a + h$ est aussi le ………………..
de la ………………………………

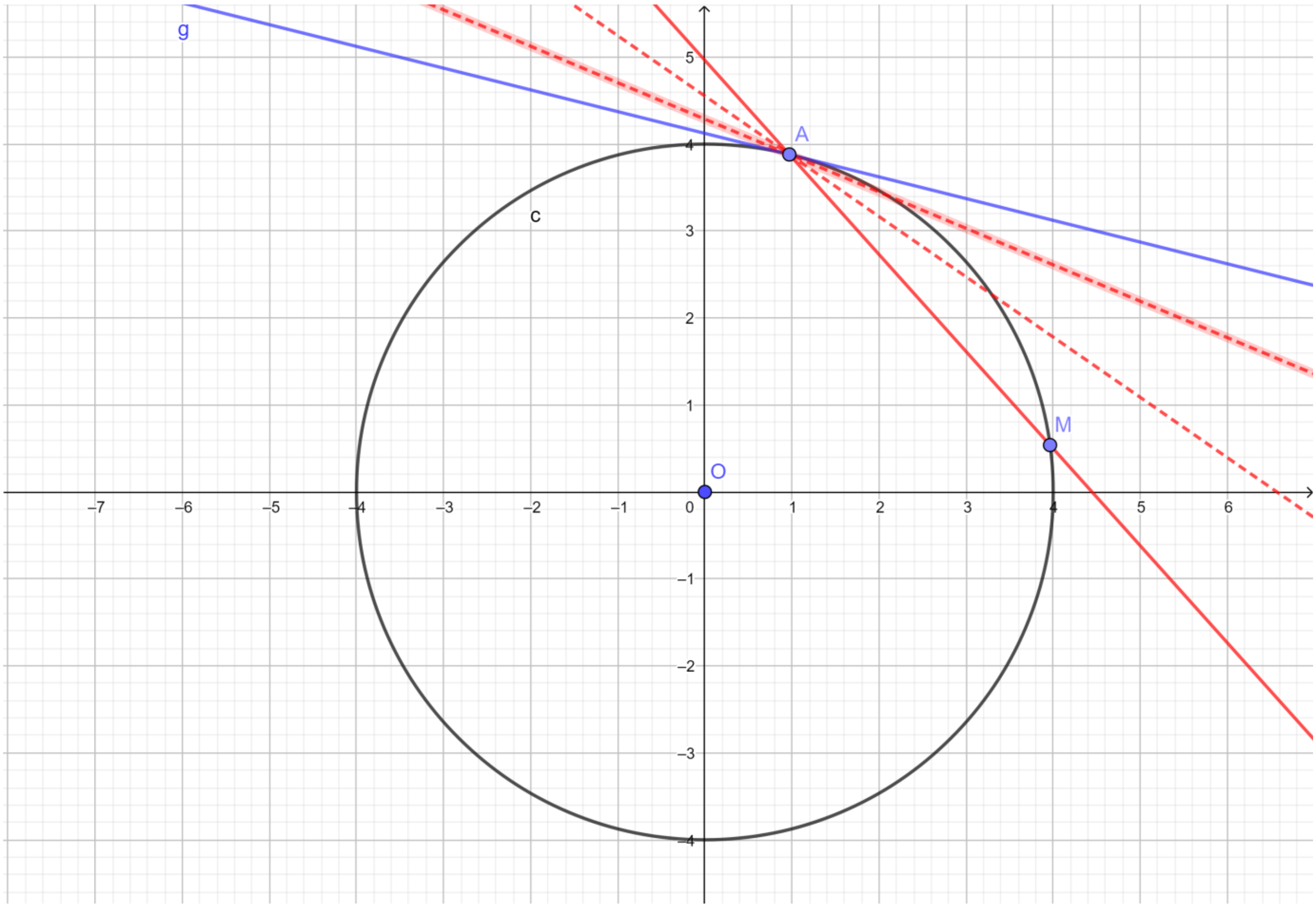


Preuve :

Le coefficient directeur de la sécante (AM) est : $\dfrac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{a+h-a} = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

2.Notion de tangente

a)Tangente à un cercle



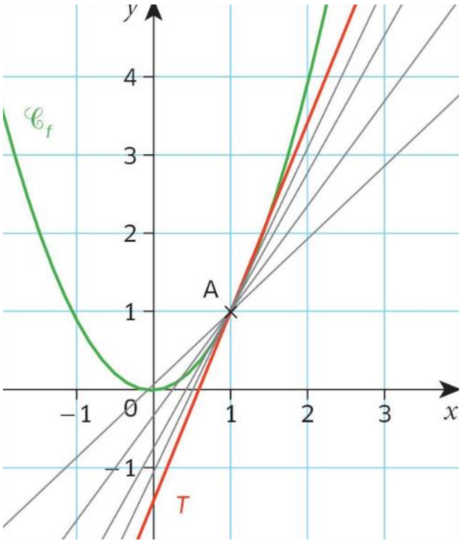
Lorsque le point M se rapproche du point A , la corde (AM) se rapproche d'une droite fixe appelé **tangente au cercle au point A** (qui est aussi la perpendiculaire au rayon [OA] passant par A et la droite passant par A qui coupe le cercle en un point)

b)Tangente à la courbe d'une fonction

Vidéo :mathssa.fr/tgte (3mns)

Définition: La tangente à une courbe C passant par le point A est la ………………..………………………… lorsque M …………………………………… du point A.

Exemple : la droite en rouge représente la position limite des sécantes c'est-à-dire la tangente à la courbe C au point A.

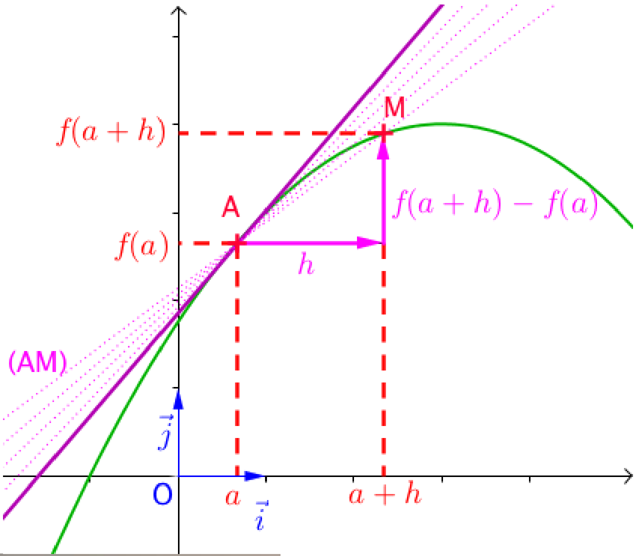


Remarque :

la tangente à la courbe C en un point A désigne la droite passant par A et qui « accompagne le mouvement » de la courbe C

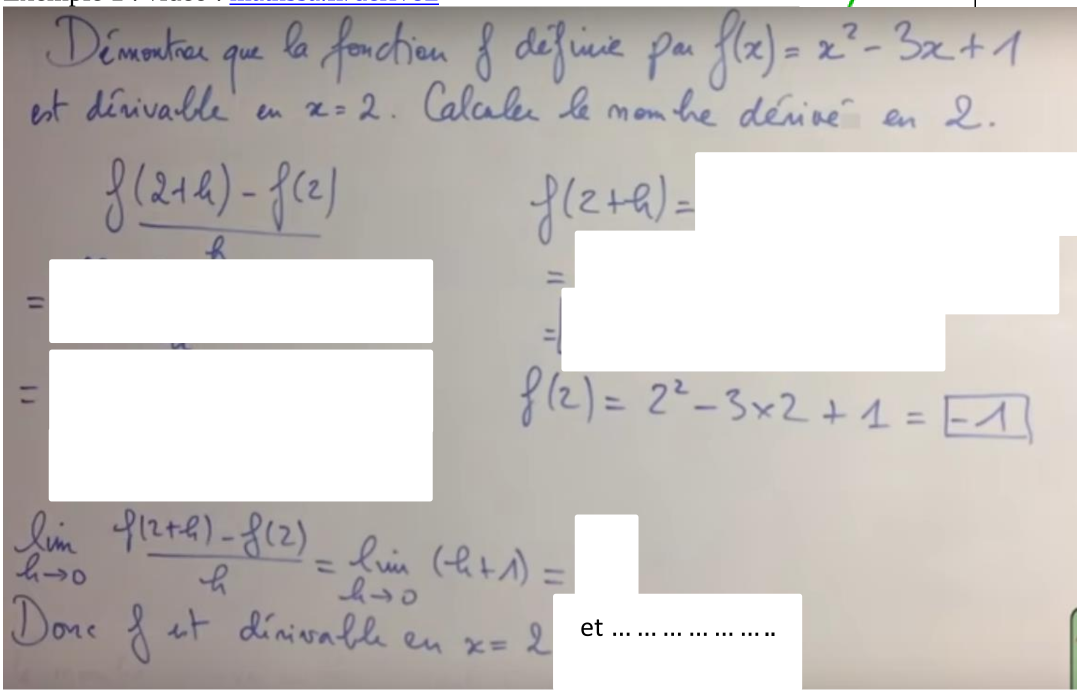
3. Nombre dérivé

Vidéo : mathssa.fr/derive (de 0 à 12mns36s)

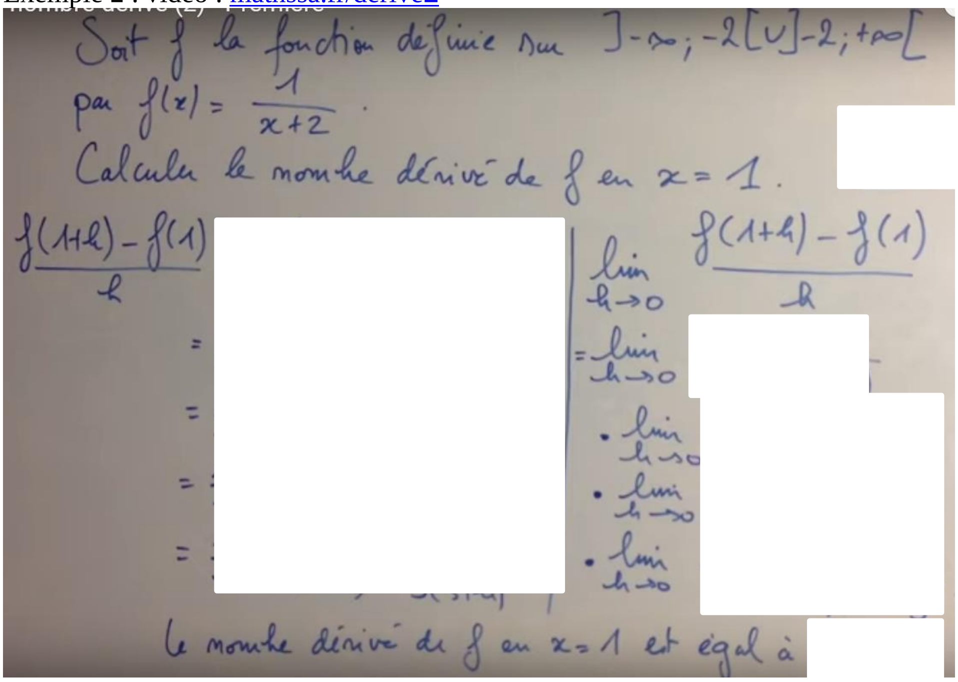


> **Définition :**
>
> Si le taux de variations de f entre a et $a+h$: … … … . . … … … ..
> se rapproche d'un nombre L lorsque … se rapproche de 0 alors on dira que f est ………………… en a et L est appelé ……………………..de f en a et est noté $f'(a)$.
>
> On écrira : $f'(a) =$ … … … . … … … … … …

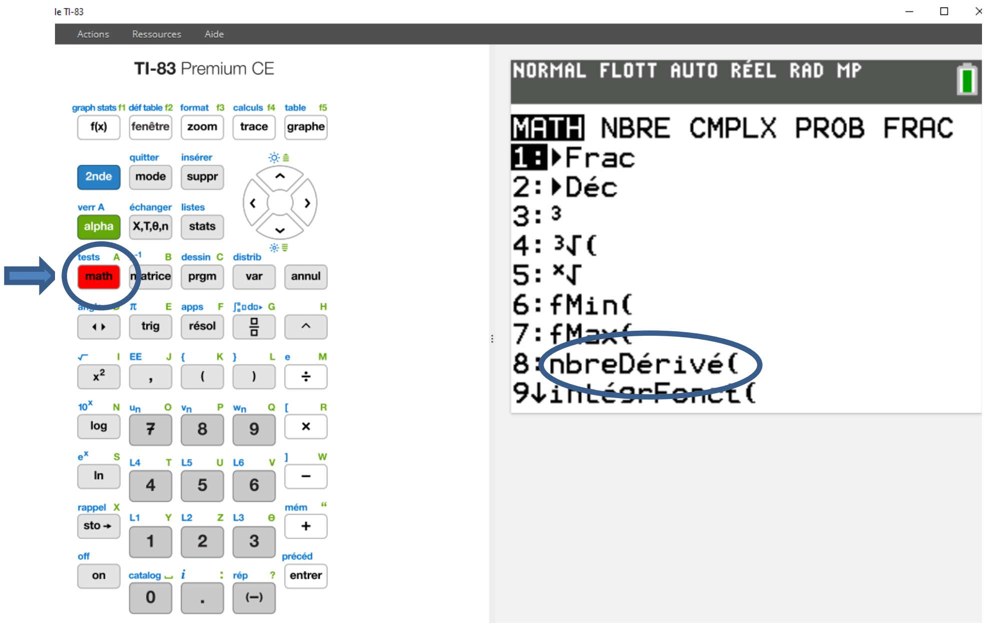
Exemple 1 : vidéo : mathssa.fr/derive1

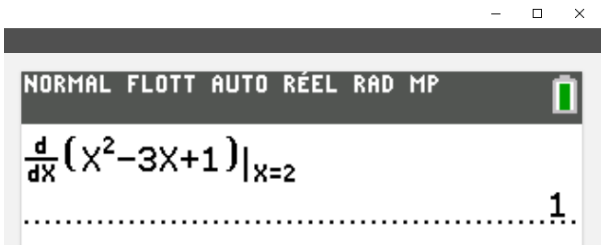


Exemple 2 : vidéo : mathssa.fr/derive2



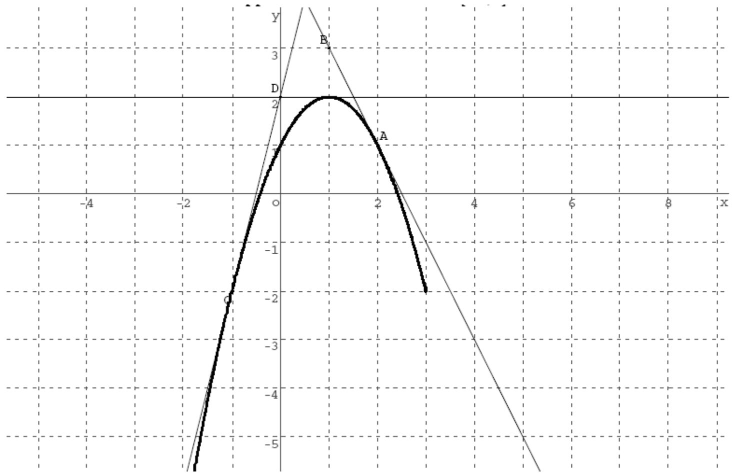
Avec la calculatrice :





Remarque importante : $f'(a)$ étant la limite du taux de variations de f entre a et $a+h$ lorsque h se rapproche de 0 , $f'(a)$ est donc aussi la limite du coefficient directeur de la sécante (AM) lorsque M se rapproche du point A. **$f'(a)$ est donc le coefficient directeur de la tangente à la courbe C au point A.**

Exercice :Soit f une fonction dérivable de courbe C représentée ci-dessous.
Sont représentées également les tangentes aux points d'abscisses -1 , 1 et 2. Déterminer, **en justifiant**,
$f'(-1)$, $f'(1)$ et $f'(2)$



$f'(-1)$ est le …………………… de la …………. à la courbe C au point d'abscisse ….
$f'(-1) =$ … … … … … … … … … ….

$f'(1)$ est le ………………………de la ………. à la courbe C au point d'abscisse ….
$f'(1) =$ … car cette droite est …………………
$f'(2)$ est le ………………………… de la ……………. à la courbe C au point d'abscisse …….
$f'(2) =$ … … … … … … … … … … …

4. Equation d'une tangente

Propriété :
Une équation de la tangente à la courbe C_f en A est : … … … … … … … … … … … … … … … …

Démonstration au programme :

Vidéo : mathssa.fr/equatangente
La tangente a pour pente $f'(a)$ donc son équation est de la forme : $y =$ … … … … … … où b est l'ordonnée à l'origine.
Déterminons b :
La tangente passe par le point A$(a\,;f(a))$, donc :
$f(a) =$ … … … … … .. soit : $b =$ … … … … … … …
On en déduit que l'équation de la tangente peut s'écrire :
$y =$ … … … … … … … … … … … … …. Soit $y =$ … … … … … … … … … … …

II – Dérivation - point de vue global

1.Fonction dérivée

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est **dérivable** sur I si elle est dérivable en tout réel x de I.
Dans ce cas, la fonction qui à tout réel x de I associe le nombre dérivé de f en x est appelée **fonction dérivée** de f et se note $f\,'$.

2. Formules de dérivation des fonctions usuelles :

Fonction f	Ensemble de définition de f	Dérivée $f\,'$	Ensemble de définition de $f\,'$
$f(x) = a,\ a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \ ...$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \ ...$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \ ...$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^3$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \ ...$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$	$f'(x) = \ ...$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0\,;\,+\infty[$	$f'(x) = \ ...$	$...\ ...\ ...\ ...$

(lire mais ne pas recopier)

Le mot « dérivé » vient du latin « derivare » qui signifiait « détourner un cours d'eau ».
Le mot a été introduit par le mathématicien franco-italien *Joseph Louis Lagrange* (1736 ; 1813) pour signifier que cette nouvelle fonction dérive (au sens de "provenir") d'une autre fonction.

Démonstration au programme pour la fonction carrée :

Video : mathssa.fr/demoderive1

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Démontrons que pour tout x réel, on : $f'(x) = 2x$.

Calculons le nombre dérivé de la fonction f en un nombre réel quelconque a.

Pour $h \neq 0$: $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2-a^2}{h} = \frac{\text{..........................}}{h} = \frac{h(\text{..................})}{h} = \ ...\ ...\ ...\ ...\ ..$

Or : $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \ ...\ ...\ ...\ ...\ ...\ ..\ = \ ...$

Pour tout nombre a, f est dérivable en a et $f'(a) = 2a$.

Démonstration au programme pour la fonction inverse :

Video : mathssa.fr/demoderive2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $(x) = \frac{1}{x}$. Démontrons que pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, on a : $f'(x) = -\frac{1}{...}$.

Pour $h \neq 0$ et $h \neq -a$:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h} = \frac{\text{...............................}}{h} = \frac{\text{.......................}}{h} = -\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots$$

Or : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{h \to 0}(\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots..) = -\ \dots\dots\dots\dots$

Pour tout nombre a *non nul*, f est dérivable en a et *f'(a)*=$-\frac{1}{\dots}$.

Ainsi, pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, on a : $f'(x) = -\frac{1}{\dots}$.

Démonstration au programme : Non dérivabilité de la fonction racine carrée en 0

Video : mathssa.fr/demoderive3

Soit la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

On calcule le taux de variation de f en 0 :

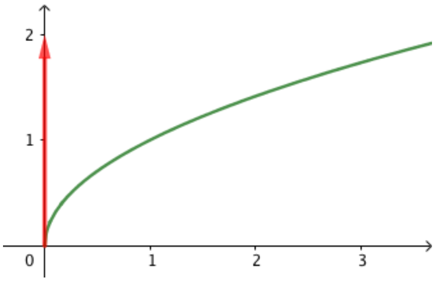
Pour $h > 0$: $\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{\sqrt{h}\sqrt{h}}{h\sqrt{h}} = \frac{\dots}{h\sqrt{h}} = \frac{1}{\dots}$

Or : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{h}} = \dots\dots$

En effet, lorsque h tend vers 0, $\frac{1}{\sqrt{h}}$ prend des valeurs de plus en plus grandes.

Donc f ……………………………. 0.

Géométriquement, cela signifie que la courbe représentative de la fonction racine carrée admet une **……………………………….. en 0.**



Exercice type:

1.Déterminer une équation de la tangente à la courbe de la fonction cube au point d'abscisse -2.

2. Existe-t-il une tangente T à Cf parallèle à la droite d d'équation $y = 3x + 5$? Si oui , déterminer les coordonnées du ou des points de contact entre Cf et T.

1.si f est une fonction dérivable en a , une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a est … … … … … … … … … … … ..

Pour tout réel x, $f'(x)$ … … … …..

Une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1 est … … … … … … … … … … …

$f(-2) =$ … … … …. , $f'(-2) =$ … … … ….

$y =$ … … … … … … … … … … … … … ….

$y =$ … … … … …

Soit T une tangente à Cf au point d'abscisse a . d la droite d'équation $y = 3x + 5$

T//(d) ⇔ elles ont le ……………………...

⇔ … … … … … …

⇔ … … … … ..

⇔ … … … ….

⇔ … … … … … … … .. Les points de contact ont pour coordonnées $A(1\ ;1)$ *et* $B(-1\ ;-1)$