CHAPITRE 2 – DERIVATION 1ère partie

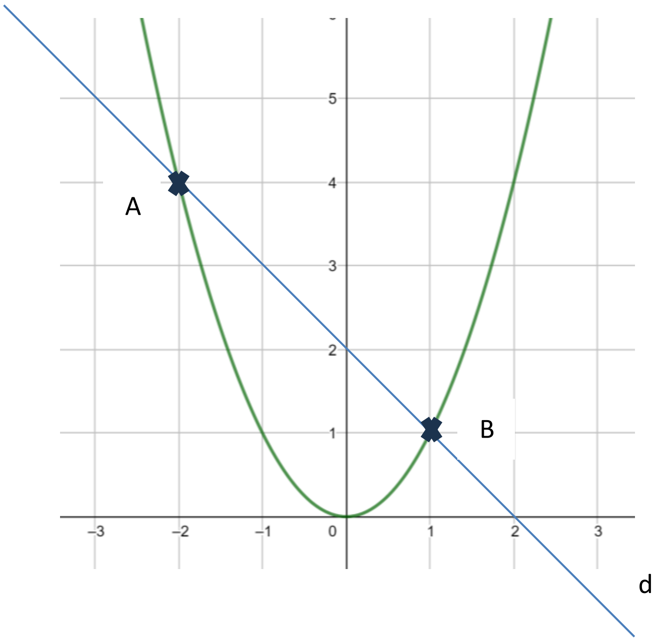
I – Dérivation - point de vue local

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , C sa courbe représentative dans un repère du plan.
h désigne un réel non nul et $a + h$ appartient à I.

1.Notion de sécante

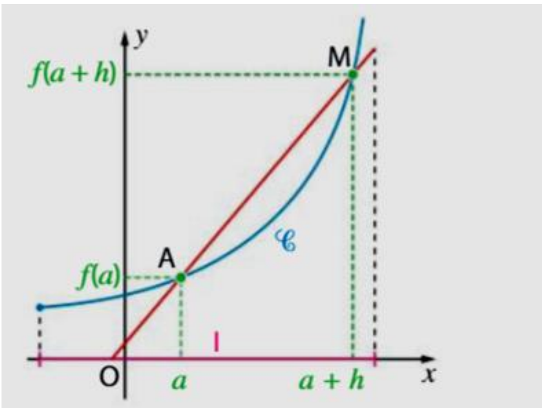
Définition :
une sécante à la courbe C désigne une droite passant par deux points de la courbe.

Exercice : déterminer l'équation de la sécante d à la courbe de la fonction carrée passant par les points A et B d'abscisse respective -2 *et* 1. (cf activité faite en classe partie exercices)



Le coefficient directeur de d est :
$m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{1^2-(-2)^2}{1-(-2)} = \dfrac{1-4}{3} = -1.$
L'équation de d est donc de la forme : $y = -x + p$
Comme A$(-2; 4)$ appartient à la droite d, ses coordonnées vérifient l'équation de d soit :
$4 = -(-2) + p$ soit $4 - 2 = p$ soit $p = 2$
Une équation de d est donc : $y = -x + 2$.

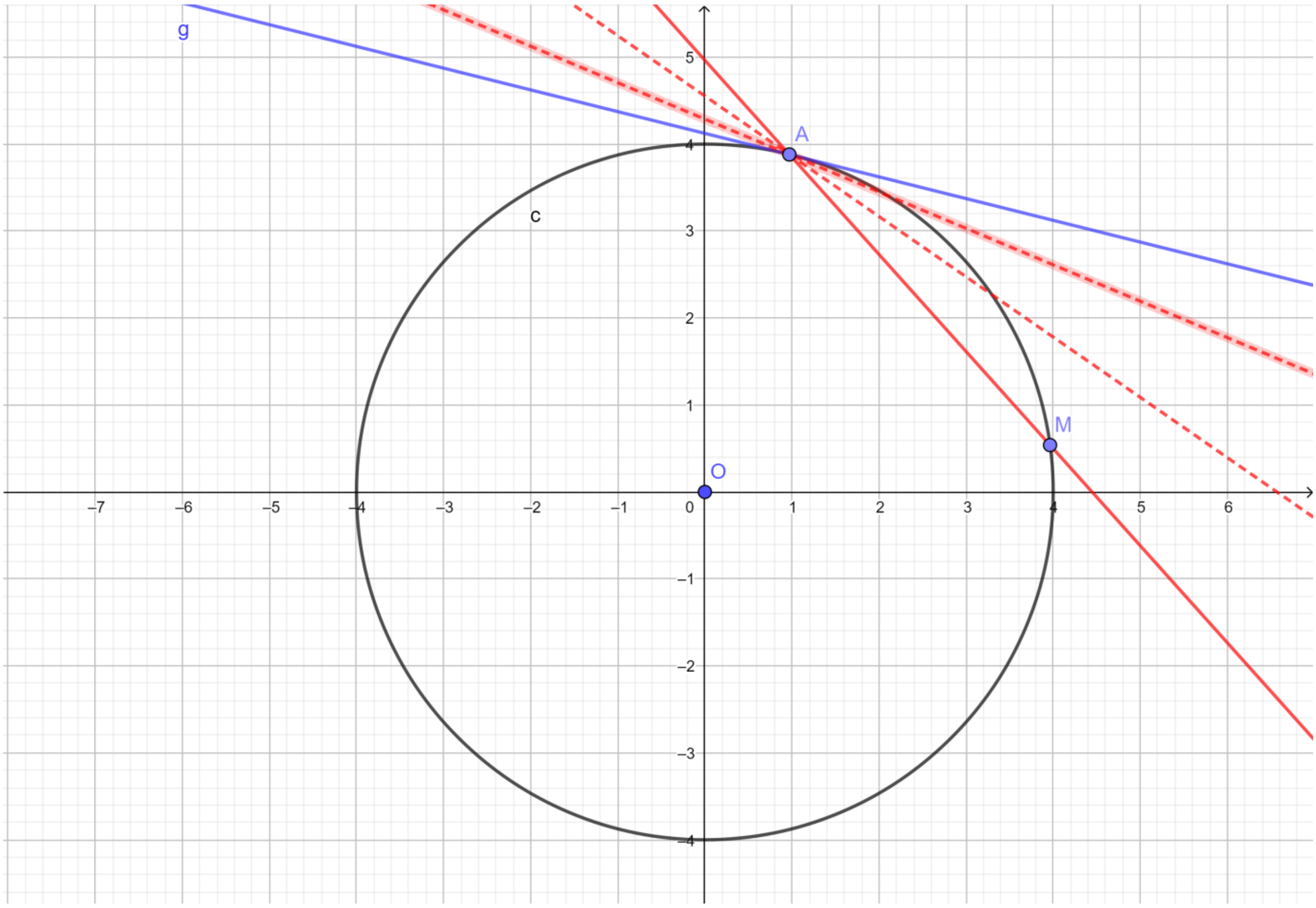
Définition-propriété :
Le taux de variations de f entre a et $a + h$ est le nombre
$r(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
Soit A le point de C d'abscisse a et M le point de C d'abscisse $a + h$.
Le taux de variations de f entre a et $a + h$ est aussi le coefficient directeur de la sécante (AM).



Preuve :
Le coefficient directeur de la sécante (AM) est : $\dfrac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a} = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

2.Notion de tangente

a)Tangente à un cercle



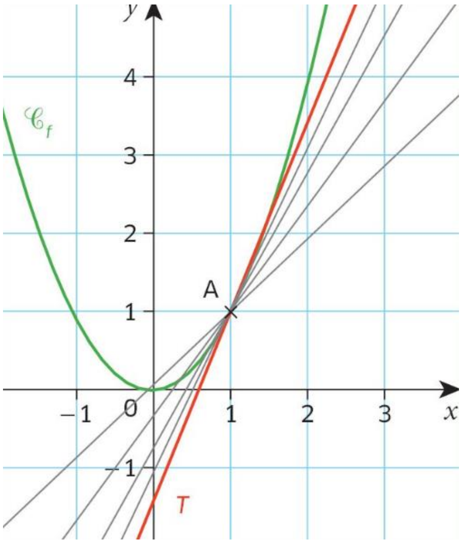
Lorsque le point M se rapproche du point A , la corde (AM) se rapproche d'une droite fixe appelé **tangente au cercle au point A** (qui est aussi la perpendiculaire au rayon [OA] passant par A et la droite passant par A qui coupe le cercle en un point)

b)Tangente à la courbe d'une fonction

Vidéo :mathssa.fr/tgte (3mns)

Définition:
La tangente à une courbe C passant par le point A est la position limite de la sécante (AM) lorsque M se rapproche de plus en plus du point A.

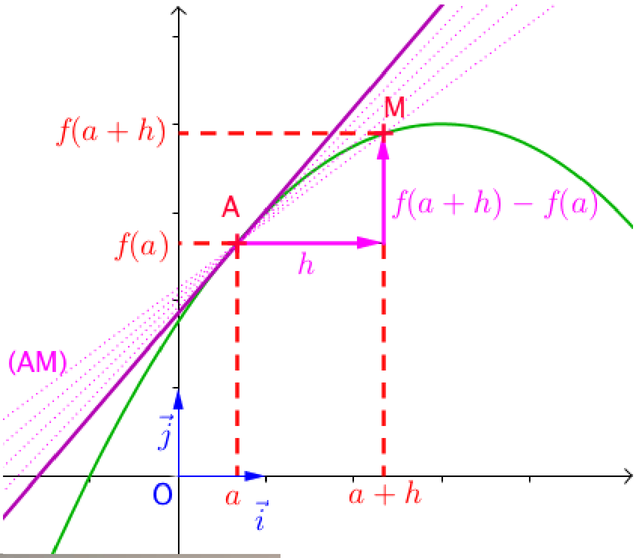
Exemple : la droite en rouge représente la position limite des sécantes c'est-à-dire la tangente à la courbe C au point A.



Remarque :
la tangente à la courbe C en un point A désigne la droite passant par A et qui « accompagne le mouvement » de la courbe C

3. Nombre dérivé

Vidéo : mathssa.fr/derive (de 0 à 12mns36s)

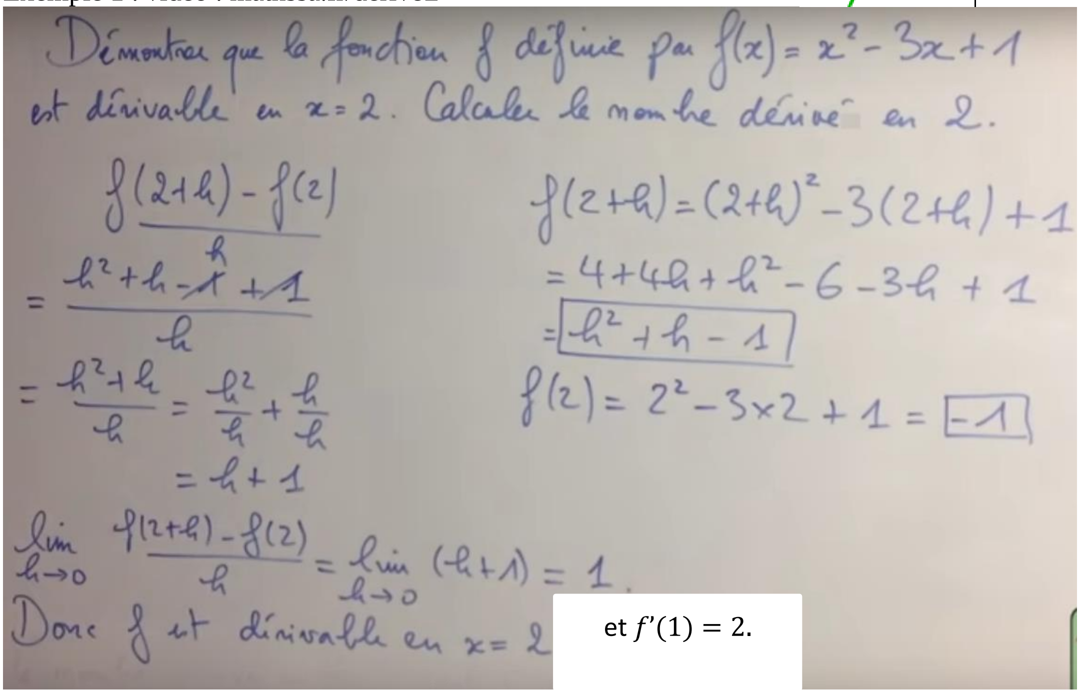


Définition :

Si le taux de variations de f entre a et $a+h$: $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ se rapproche d'un nombre L lorsque h se rapproche de 0 alors on dira que f est dérivable en a et L est appelé nombre dérivé de f en a et est noté $f'(a)$.

On écrira : $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Exemple 1 : vidéo : mathssa.fr/derive1



Démontrer que la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 3x + 1$ est dérivable en $x = 2$. Calculer le nombre dérivé en 2.

$f(2+h) = (2+h)^2 - 3(2+h) + 1$
$= 4 + 4h + h^2 - 6 - 3h + 1$
$= \boxed{h^2 + h - 1}$

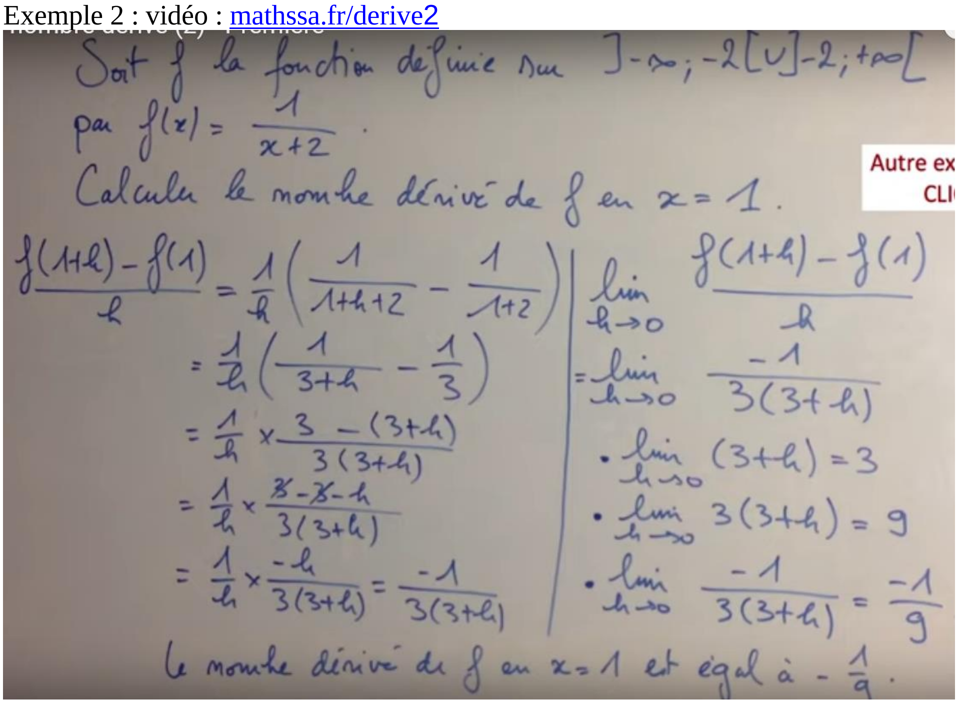
$f(2) = 2^2 - 3 \times 2 + 1 = \boxed{-1}$

$\frac{f(2+h) - f(2)}{h}$
$= \frac{h^2 + h \cancel{-1} \cancel{+1}}{h}$
$= \frac{h^2 + h}{h} = \frac{h^2}{h} + \frac{h}{h}$
$= h + 1$

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (h+1) = 1$.

Donc f est dérivable en $x = 2$ et $f'(1) = 2$.

Exemple 2 : vidéo : mathssa.fr/derive2



Soit f la fonction définie sur $]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x+2}$.

Calculer le nombre dérivé de f en $x = 1$.

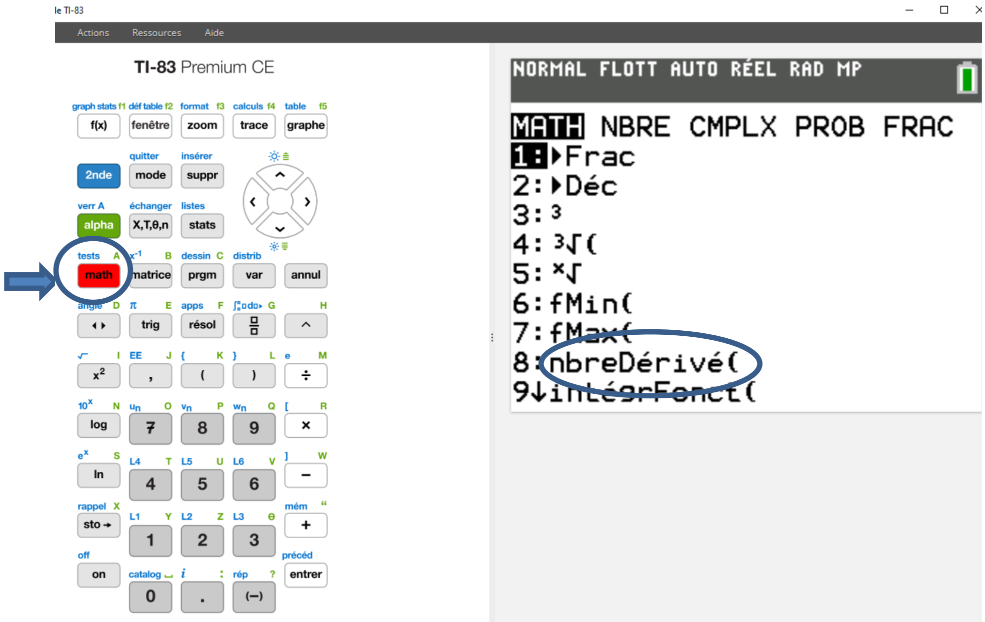
$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{1}{h}\left(\frac{1}{1+h+2} - \frac{1}{1+2}\right)$
$= \frac{1}{h}\left(\frac{1}{3+h} - \frac{1}{3}\right)$
$= \frac{1}{h} \times \frac{3 - (3+h)}{3(3+h)}$
$= \frac{1}{h} \times \frac{\cancel{3} - \cancel{3} - h}{3(3+h)}$
$= \frac{1}{h} \times \frac{-h}{3(3+h)} = \frac{-1}{3(3+h)}$

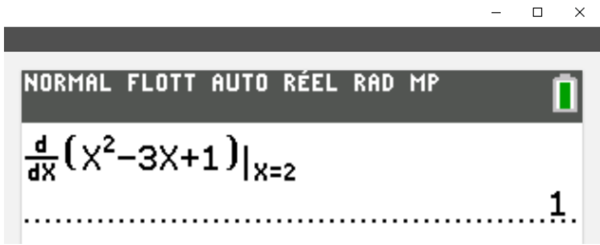
$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$
$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{-1}{3(3+h)}$

- $\lim\limits_{h \to 0} (3+h) = 3$
- $\lim\limits_{h \to 0} 3(3+h) = 9$
- $\lim\limits_{h \to 0} \frac{-1}{3(3+h)} = \frac{-1}{9}$

Le nombre dérivé de f en $x = 1$ est égal à $-\frac{1}{9}$.

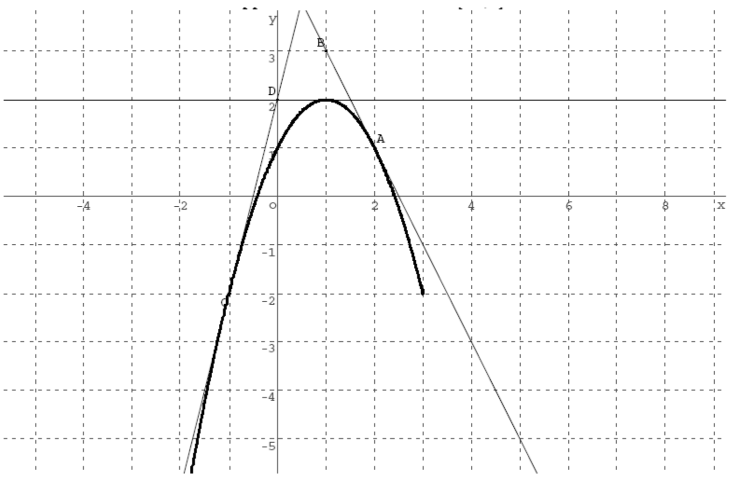
Avec la calculatrice : **ne pas recopier**





<u>Remarque importante :</u> $f'(a)$ étant la limite du taux de variations de f entre a et $a+h$ lorsque h se rapproche de 0 , $f'(a)$ est donc aussi la limite du coefficient directeur de la sécante (AM) lorsque M se rapproche du point A. **$f'(a)$ est donc le coefficient directeur de la tangente à la courbe C au point A.**

Exercice :Soit f une fonction dérivable de courbe C représentée ci-dessous.
Sont représentées également les tangentes aux points d'abscisses -1 , 1 *et* 2. Déterminer, **en justifiant**,
$f'(-1)$, $f'(1)$ et $f'(2)$



$f'(-1)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe C au point d'abscisse -1.
$f'(-1) = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{2-(-2)}{0-(-1)} = 4$
$f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 1.
$f'(1) = 0$ car cette droite est horizontale.
$f'(2)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 2.
$f'(2) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-1}{1-2} = -2$

<u>II – Dérivation - point de vue global</u>

<u>1.Fonction dérivée</u>

<u>Définition :</u> Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est **dérivable** sur I si elle est dérivable en tout réel x de I.
Dans ce cas, la fonction qui à tout réel x de I associe le nombre dérivé de f en x est appelée **fonction dérivée** de f et se note f'.

2. Formules de dérivation des fonctions usuelles :

Fonction f	Ensemble de définition de f	Dérivée f'	Ensemble de définition de f'
$f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0\,;\,+\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\,;\,+\infty[$

Le mot « dérivé » vient du latin « derivare » qui signifiait « détourner un cours d'eau ».
Le mot a été introduit par le mathématicien franco-italien *Joseph Louis Lagrange* (1736 ; 1813) pour signifier que cette nouvelle fonction dérive (au sens de "provenir") d'une autre fonction.

Démonstration au programme pour la fonction carrée :

Video : mathssa.fr/demoderive1

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Démontrons que pour tout x réel, on : $f'(x) = 2x$.

Calculons le nombre dérivé de la fonction f en un nombre réel quelconque a.

Pour $h \neq 0$: $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2-a^2}{h} = \frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} = \frac{h(2a+h)}{h} = 2a + h$

Or : $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 2a + h = 2a$

Pour tout nombre a, f est dérivable en a et $f'(a) = 2a$.

Démonstration au programme pour la fonction inverse :

Video : mathssa.fr/demoderive2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $f(x) = \frac{1}{x}$. Démontrons que pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, on a : $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Pour $h \neq 0$ et $h \neq -a$:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h} = \frac{\frac{a-a-h}{a(a+h)}}{h} = \frac{\frac{-h}{a(a+h)}}{h} = -\frac{1}{a(a+h)}$$

Or : $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \left(-\frac{1}{a(a+h)}\right) = -\frac{1}{a^2}$

Pour tout nombre a *non nul*, f est dérivable en a et $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$.

Ainsi, pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, on a : $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Démonstration au programme : Non dérivabilité de la fonction racine carrée en 0

vidéo : mathssa.fr/demoderive3

Soit la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$.

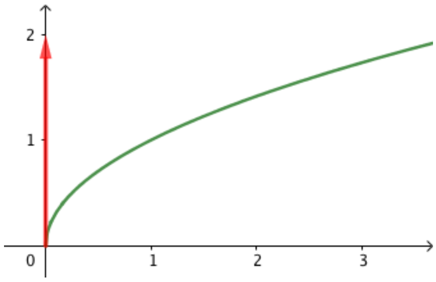
On calcule le taux de variation de f en 0 :

Pour $h>0$: $\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h}=\frac{\sqrt{h}}{h}=\frac{\sqrt{h}\sqrt{h}}{h\sqrt{h}}=\frac{h}{h\sqrt{h}}=\frac{1}{\sqrt{h}}$

Or : $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{h}}=+\infty$.

En effet, lorsque h tend vers 0, $\frac{1}{\sqrt{h}}$ prend des valeurs de plus en plus grandes.

Donc f n'est pas dérivable en 0.
Géométriquement, cela signifie que la courbe représentative de la fonction racine carrée admet une **tangente verticale en 0.**



Exercice type:

1.Déterminer une équation de la tangente à la courbe de la fonction cube au point d'abscisse -2.

2. Existe-t-il une tangente T à Cf parallèle à la droite d d'équation $y=3x+5$? Si oui , déterminer les coordonnées du ou des points de contact entre Cf et T.

1.si f est une fonction dérivable en a , une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a est $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

Pour tout réel x, $f'(x)=3x^2$

Une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1 est
$y=f'(-2)(x+2)+f(-2)$

$f(-2)=(-2)^3=-8.$, $f'(2)=3(-2)^2=12$

$y=12(x+2)-8$

$y=12x+16$

Soit T une tangente à Cf au point d'abscisse a . d la droite d'équation $y=3x+5$

T//(d) $\Leftrightarrow$ elles ont le meme coefficient directeur

$\Leftrightarrow f'(a)=3$

$\Leftrightarrow 3a^2=3$

$\Leftrightarrow a^2=1.$

$\Leftrightarrow a=-1$ ou $a=1$ Les points de contact ont pour coordonnées $A(1\,;1)$ et $B(-1\,;-1)$