CHAPITRE 3 – Probabilités conditionnelles 1ère partie

Dans tout le chapitre, P est une probabilité définie sur l'univers Ω.

I- Probabilité conditionnelle

1.Définition et propriétés :

Vidéo : mathssa.fr/probacondi (de 0 à 8 mns30s)

Définition : Soit A et B deux événements avec $P(A) \neq 0$.
On appelle **probabilité conditionnelle** de B sachant A, la probabilité que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé. Elle est notée $P_A(B)$ et est définie par : $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

Exemple : lien vidéo : mathssa.fr/probacondi2 (7mns42s)
On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
Soit A l'événement "Le résultat est un pique".
Soit B l'événement "Le résultat est un roi". Calculer $P_A(B)$ et $P_B(A)$

$P(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$,
$A \cap B$ est l'événement "Le résultat est le roi de pique". Alors : $P(A \cap B) = \frac{1}{32}$.
La probabilité que le résultat soit un roi sachant qu'on a tiré un pique est :
$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{32} \div \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.
On peut retrouver intuitivement ce résultat. En effet, sachant que le résultat est un pique, on a une chance sur 8 d'obtenir le roi.
La probabilité que le résultat soit un pique sachant qu'on a tiré un roi est :
$P_B(A) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{1}{32} \div \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$.
On peut retrouver intuitivement ce résultat. En effet, sachant que le résultat est un roi, on a une chance sur 4 d'obtenir un pique.

Remarques: en pratique, il faut être très attentif à l'énoncé et s'intéresser à l'ensemble de référence. Si ce dernier est modifié, il faudra penser à une probabilité conditionnelle.
La probabilité conditionnelle suit les règles et lois de probabilités vues pour les probabilités simples. On a en particulier :

Propriétés : Soit A et B deux événements avec $P(A) \neq 0$.
- $0 \leq P_A(B) \leq 1$
- $P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B)$
- $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$

<u>Preuve :</u> $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Or $0 \leq P(A \cap B) \leq P(A)$ et donc

$0 \leq \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \leq 1$ (en divisant par $P(A) \neq 0$)

D'où $0 \leq P_A(B) \leq 1$.

$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

$\frac{P_A(B)}{1} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

D'où $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$

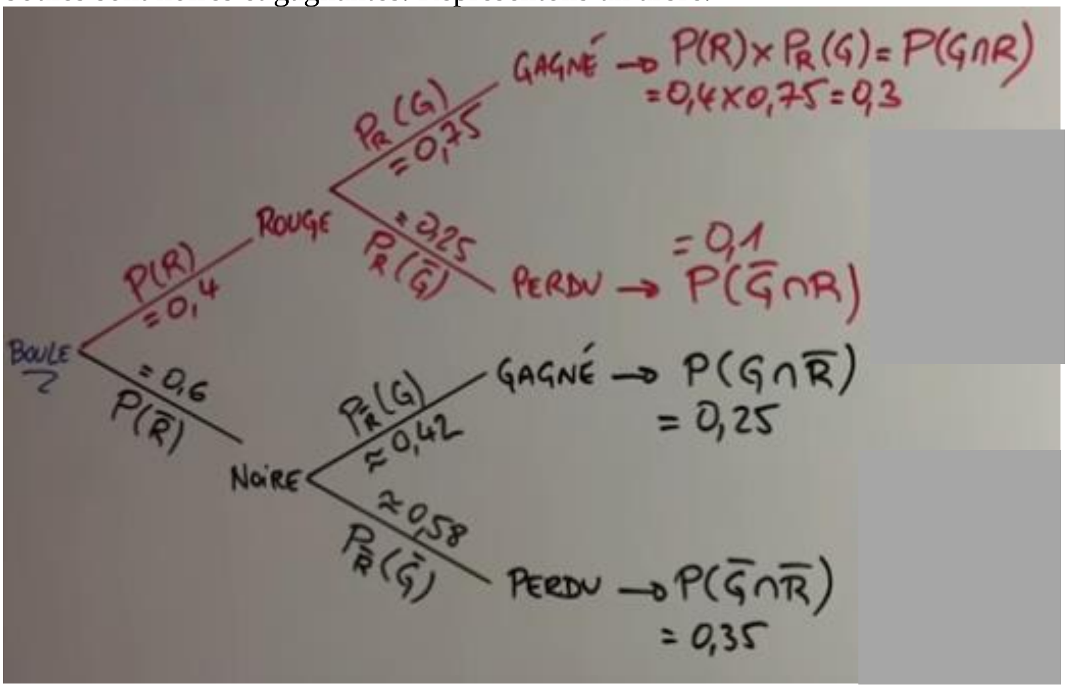
2.Arbre pondéré :

Vidéo : mathssa.fr/probacondi (de 8 mns30s à 20mns)

<u>Règles :</u>

- *Sur les premières branches de l'arbre, on indiquera les* ***probabilités*** *des évènements et sur les suivantes, on indiquera les* ***probabilités conditionnelles****.*
- *La probabilité de* ***l'intersection*** *des évènements se trouvant sur un chemin est égale au* ***produit*** *des probabilités inscrites sur chaque branche du chemin.*
- ***Règle des nœuds** : La somme des probabilités affectées aux branches issues d'un même nœud est égale à 1.*

<u>Illustration :</u>On tire au hasard une boule dans une urne contenant des boules rouges et noires. L'urne contient 40% de boules rouges . Parmi les boules rouges, 75% sont gagnantes et 25%de boules sont noires et gagnantes. Représentons un arbre.



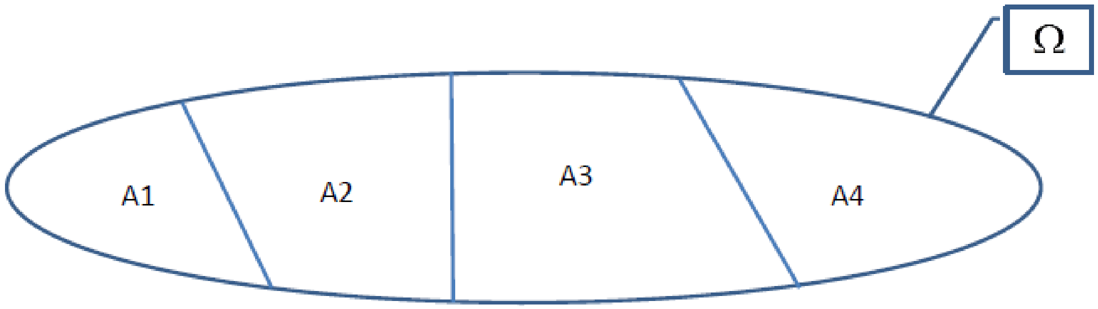
II-Formule des probabilités totales :

Vidéo : mathssa.fr/probacondi (de 20mns à 22mns30s)

Définition : une partition de l'univers Ω est un ensemble d'évènements deux à deux incompatibles et dont la réunion est Ω.

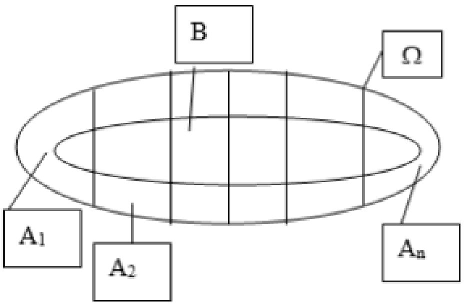
Exemple : On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes

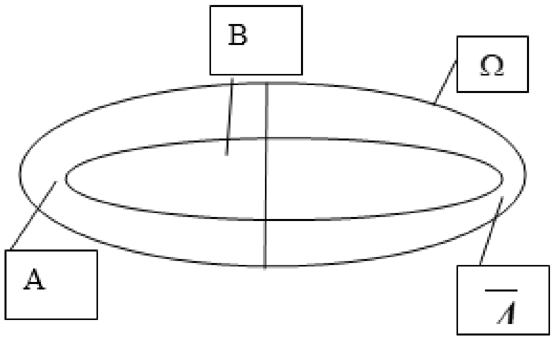
A_1= « tirer un cœur » , A_2= « tirer un carreau » , A_3= « tirer un pique » et A_4= « tirer un trèfle » est une **partition** de Ω



$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = \Omega$$

Remarque : si A est un évènement alors les évènements A et $\overline{A}$ forment une partition de Ω





Théorème : On suppose que les évènements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forment une partition de Ω.

Alors pour tout évènement B, $P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_n)$

Conséquence :
soit A et B deux évènements alors : $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})$

Méthode : Calculer la probabilité d'un événement à l'aide des probabilités totales

Vidéo : mathssa.fr/probacondi3 (12mns)

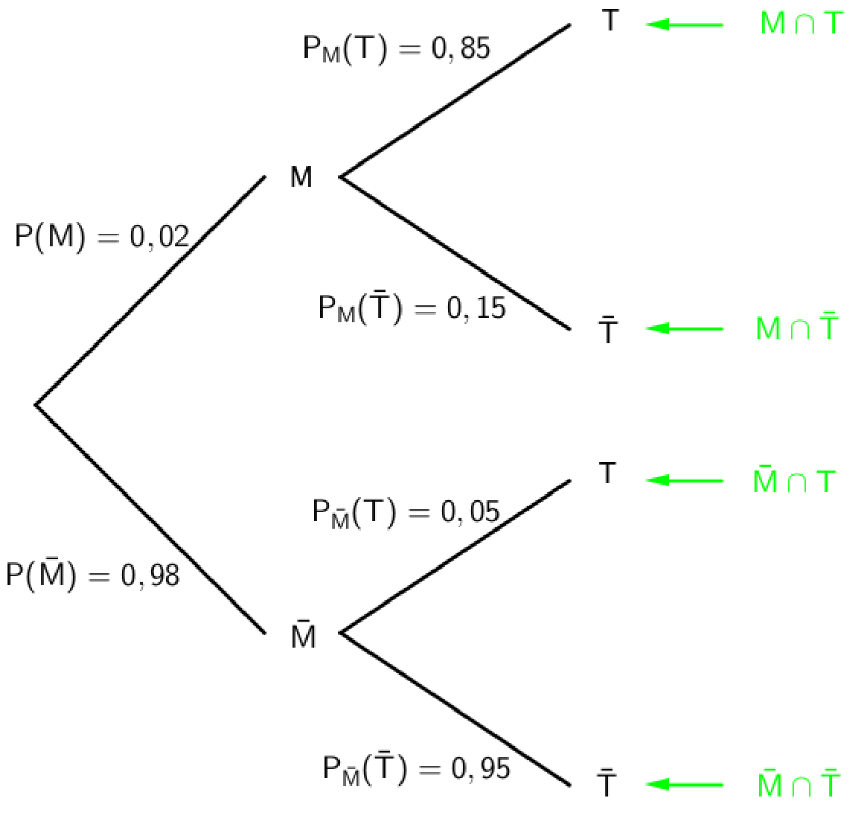
Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle.
Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 2 % est porteur de la maladie. On obtient les résultats suivants :
– si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;
– si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.
On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour toute la population et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.
On note respectivement M et T les événements « Être porteur de la maladie » et
« Avoir un test positif ».

1) Un animal est choisi au hasard. Quelle est la probabilité que son test soit positif ?

D'après BAC S, Antilles-Guyanne 2010

2) Si le test du bovin est positif, quelle est la probabilité qu'il soit malade ?

1)



La probabilité que le test soit positif est associée aux deux évènements $M \cap T$ et $\bar{M} \cap T$.
$P(T) = P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap T)$ (Formule des probabilités totales)
$= 0,02 \times 0,85 + 0,98 \times 0,05 = 0,066$.
La probabilité que le test soit positif est égale à 6,6%.

2) $P_T(M) = \frac{P(T \cap M)}{P(T)} = \frac{0,02 \times 0,85}{0,066} \approx 0,26$.
La probabilité que le bovin soit malade sachant que le test est positif est d'environ 26%.