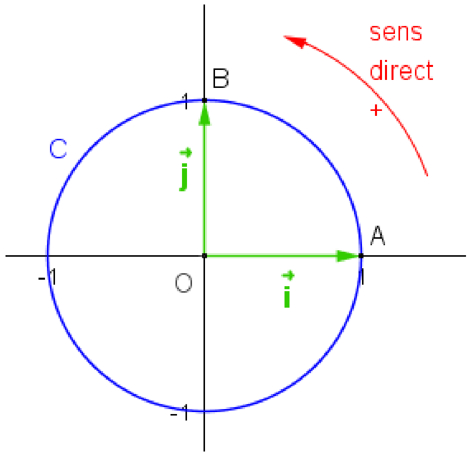
CHAPITRE 4 –produit scalaire 1ère partie

I. Cercle trigonométrique et radian

Vidéo : mathssa.fr/trigo (3mns 30s)



1.Le cercle trigonométrique

Définition : Sur un cercle, on appelle **sens direct**, **sens positif** ou **sens trigonométrique** le sens ……….des aiguilles d'une montre.

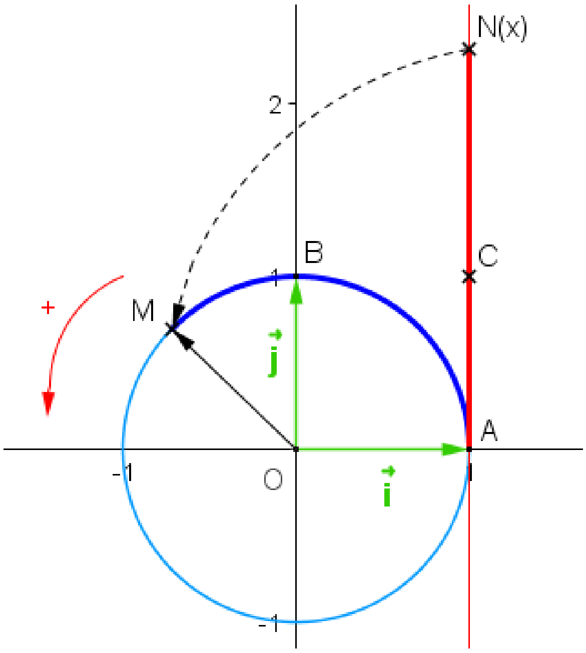
Définition :
Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ et orienté dans le sens direct, le **cercle trigonométrique** est le cercle de centre O et de rayon 1.

2.Enroulement d'une droite autour du cercle trigonométrique

Dans un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, on considère le cercle trigonométrique et une droite (AC) tangente au cercle en A et orientée telle que $\left(A\,;\vec{\jmath}\right)$ soit un repère de la droite.

Si l'on « enroule » la droite autour du cercle, on associe à tout point N d'abscisse *x* de la droite orientée un unique point M du cercle.

La longueur de l'arc $\widehat{AM}$ est ainsi égale à la longueur AN.

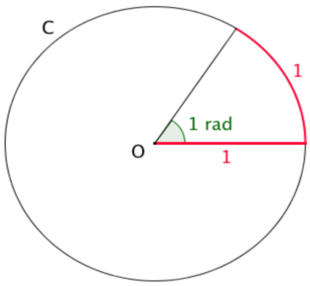


3.Le radian

Vidéo : mathssa.fr/trigo (de 3mns32 à 8mns35s)

La longueur du cercle trigonométrique est égale à 2π.
En effet, son rayon est 1 donc $P = 2\pi R = 2\pi \times 1 = 2\pi$
Ainsi, à un tour complet sur le cercle, on peut faire correspondre le nombre réel 2π.
On définit alors une nouvelle unité d'angle : le radian, tel qu'un tour complet mesure 360° ou 2π radians.

Définition :
On appelle **radian**, noté *rad*, la mesure de l'angle au centre qui intercepte un arc de longueur 1 du cercle.



4.Correspondance degrés et radians

Ainsi, à 2π radians (tour complet), on fait correspondre un angle de 360°.
Par proportionnalité, on obtient les correspondances suivantes :

Angle en degré	0°	30°	45°	60°	90°	180°	360°
Angle en radian							

Méthode : Passer des degrés aux radians et réciproquement
vidéo : mathssa.fr/angle (6mns42s)

1) Donner la mesure en radians de l'angle α de mesure 33°.

2) Donner la mesure en degrés de l'angle β de mesure $\frac{3\pi}{8}$ rad.

2π	?	$\frac{3\pi}{8}$
360°	33°	?

1) $\alpha =$ … … … … … .. 2) $\beta =$ … … … … … … … …

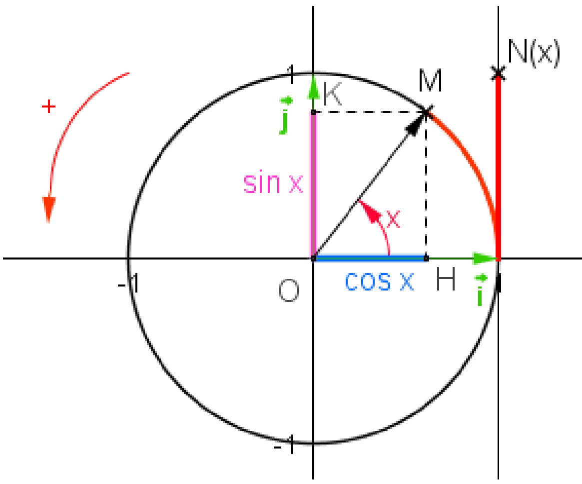
II- Cosinus et sinus d'un angle

Vidéo : mathssa.fr/trigo (de 11mns 45s à 18mns12s)

1.Définitions :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ et orienté dans le sens direct, on considère un cercle trigonométrique de centre O.

Pour tout nombre réel x, considérons le point N de la droite orientée d'abscisse x. À ce point, on fait correspondre un point M sur le cercle trigonométrique. On appelle H et K les pieds respectifs des perpendiculaires à l'axe des abscisses et à l'axe des ordonnées passant par M.



Définitions :
- Le **cosinus** du nombre réel x est …………………… de M et on note **cos** *x ou cos(x).*
- Le **sinus** du nombre réel x est ………………………de M et on note **sin** *x ou sin(x).*

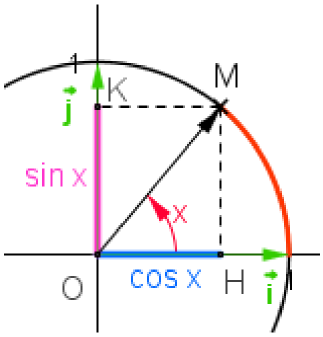
2.Propriétés immédiates:

Propriétés :

1) $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ et $-1 \leq \cos(x) \leq 1$
2) $cos^2(x) + sin^2(x) =$ …
3) $\sin(-x) =$ … … . et $\cos(-x) =$ … . .
4) $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$ où k entier relatif
5) $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$ où k entier relatif

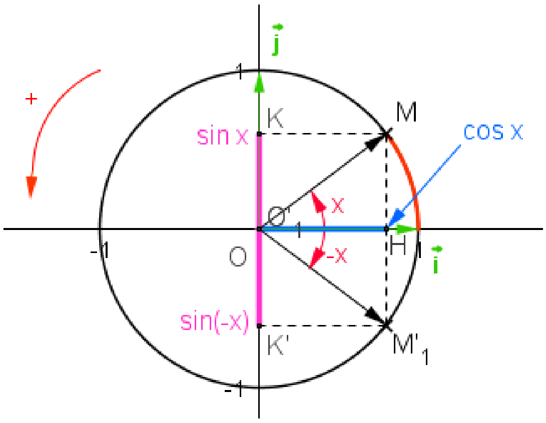
Remarque : $(sin(x))^2$, par exemple, se note $sin^2(x)$

Démonstrations :



1) Le cercle trigonométrique est de rayon 1 donc :
$-1 \leq \sin(x) \leq 1$ et $-1 \leq \cos(x) \leq 1$.

2) Dans le triangle OHM rectangle en H, le théorème de Pythagore permet d'établir que :
$\cos^2(x) + \sin^2(x) = OM^2 = 1$.



3) Les angles de mesures x et $-x$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses donc :
$\sin(-x) = -\sin(x)$ et $\cos(-x) = \cos(x)$.

4) 5) Aux points de la droite orientée d'abscisses x et $x + 2k\pi$ ont fait correspondre le même point du cercle trigonométrique.

3.Valeurs remarquables des fonctions sinus et cosinus :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1					-1
$\sin x$	0					0

Remarque :il faut absolument connaître ces valeurs par cœur ou utiliser un procédé mnémotechnique :
par exemple on remplit d'abord la 2ème colonne, en écrivant $1=\frac{\sqrt{4}}{2}$ et $0=\frac{\sqrt{0}}{2}$ puis pour les cosinus , on fait décroître l'entier à l'intérieur de la racine et pour le sinus , on augmente l'entier à l'intérieur de la racine.

Utilisation de la calculatrice : Pour effectuer des calculs trigonométriques à l'aide de la calculatrice, il faut préalablement sélectionner l'unité de mesure d'angle (radian ou degré).Quand l'unité n'est pas précisé , on considère que l'angle est en radian . Exemple : $\sin(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\tan(25°) \approx 0{,}466$

III- Définition géométrique du produit scalaire

Vidéo : mathssa.fr/prodscal (de 0 à 5mns20s)

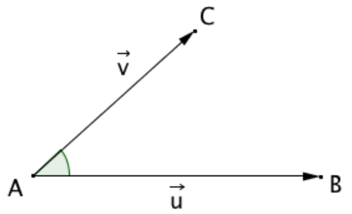
1.Norme d'un vecteur

Définition : Soit un vecteur $\vec{u}$ et deux points A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.
La **norme du vecteur** $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$, est la distance AB.

2.Définition du produit scalaire- 1ère expression du produit scalaire

Définition : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
On appelle **produit scalaire** de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté $\vec{u}.\vec{v}$, le nombre réel défini par :

- $\vec{u}.\vec{v} =$ ..., si l'un des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul
- $\vec{u}.\vec{v} =$ ... ..., dans le cas contraire.

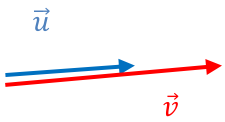


$\vec{u}.\vec{v}$ se lit "$\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$".

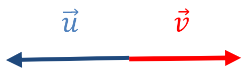
Remarques :

- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux représentants des vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ alors :

$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} =$ ... ...



- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs colinéaires de même sens ,
  $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(0) =$ ... ...



- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs colinéaires de sens contraire ,

$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\pi) =$ ... ...

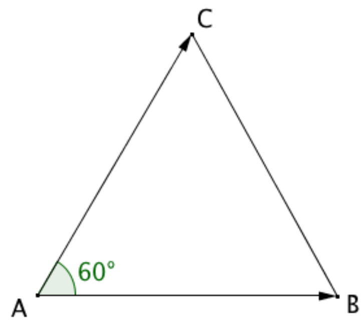
- $\vec{u}.\vec{u} =$ ... ...

$\vec{u}.\vec{u}$ se note aussi $\vec{u}^2$ et est appelé carré scalaire de $\vec{u}$.
$\vec{u}^2 =$ ... ...

Méthode : Calculer un produit scalaire à l'aide du cosinus

Soit un triangle équilatéral ABC de côté a.
Calculer, en fonction de a, le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \cdots$ ... ...
= ... ...
= ... ...



Attention : Le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre réel. Écrire par exemple $\vec{u}.\vec{v} = \vec{0}$ est une maladresse à éviter !

Lire mais ne pas noter :

La notion de produit scalaire est apparue pour les besoins de la physique. Le concept relativement récent et a été introduit au milieu du XIXe siècle par le mathématicien allemand *Hermann Grassmann* (1809 ; 1877).
Il fut baptisé produit scalaire par *William Hamilton* (1805 ; 1865) en 1853.