

CHAPITRE 4 –produit scalaire 1^{ère} partie

I. Cercle trigonométrique et radian

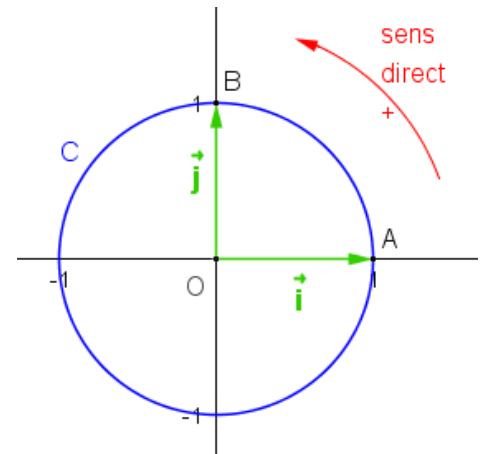
Vidéo : mathssa.fr/trigo (3mns 30s)

1. Le cercle trigonométrique

Définition : Sur un cercle, on appelle **sens direct**, **sens positif** ou **sens trigonométrique** le sens contraire des aiguilles d'une montre.

Définition :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et orienté dans le sens direct, le **cercle trigonométrique** est le cercle de centre O et de rayon 1.

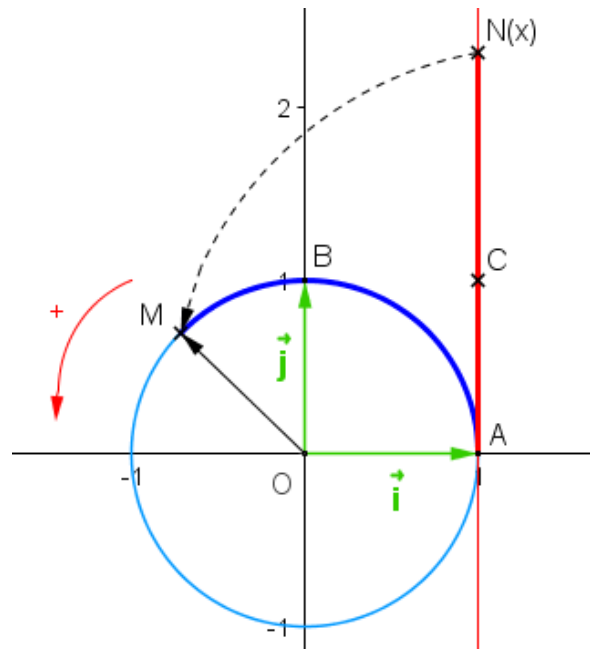


2. Enroulement d'une droite autour du cercle trigonométrique

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère le cercle trigonométrique et une droite (AC) tangente au cercle en A et orientée telle que $(A; \vec{j})$ soit un repère de la droite.

Si l'on « enroule » la droite autour du cercle, on associe à tout point N d'abscisse x de la droite orientée un unique point M du cercle.

La longueur de l'arc $\widehat{AM}$ est ainsi égale à la longueur AN.



3. Le radian

Vidéo : mathssa.fr/trigo (de 3mns32 à 8mns35s)

A lire mais ne pas noter :

La longueur du cercle trigonométrique est égale à 2π .

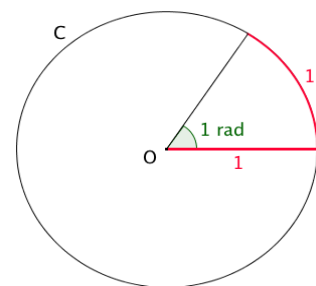
En effet, son rayon est 1 donc $P = 2\pi R = 2\pi \times 1 = 2\pi$

Ainsi, à un tour complet sur le cercle, on peut faire correspondre le nombre réel 2π .

On définit alors une nouvelle unité d'angle : le radian, tel qu'un tour complet mesure 360° ou 2π radians.

Définition :

On appelle **radian**, noté **rad**, la mesure de l'angle au centre qui intercepte un arc de longueur 1 du cercle.



4. Correspondance degrés et radians

Ainsi, à 2π radians (tour complet), on fait correspondre un angle de 360° .

Par proportionnalité, on obtient les correspondances suivantes :

Angle en degré	0°	30°	45°	60°	90°	180°	360°
Angle en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

Méthode : Passer des degrés aux radians et réciproquement

vidéo : mathssa.fr/angle (6mns42s)

1) Donner la mesure en radians de l'angle α de mesure 33° .

2) Donner la mesure en degrés de l'angle β de mesure $\frac{3\pi}{8}$ rad.

2π	?	$\frac{3\pi}{8}$
360°	33°	?

$$1) \alpha = \frac{2\pi \times 33}{360} = \frac{11\pi}{60} \quad 2) \beta = \frac{\frac{3\pi}{8} \times 360}{2\pi} = 67,5^\circ$$

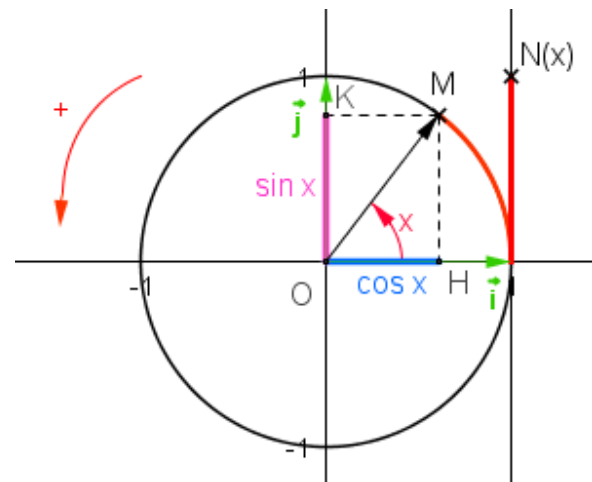
II- Cosinus et sinus d'un angle

Vidéo : mathssa.fr/trigo (de 11mns 45s à 18mns12s)

1. Définitions :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et orienté dans le sens direct, on considère un cercle trigonométrique de centre O.

Pour tout nombre réel x , considérons le point N de la droite orientée d'abscisse x . À ce point, on fait correspondre un point M sur le cercle trigonométrique. On appelle H et K les pieds respectifs des perpendiculaires à l'axe des abscisses et à l'axe des ordonnées passant par M.

**Définitions :**

- Le **cosinus** du nombre réel x est l'abscisse de M et on note **cos x** ou **cos(x)**.
- Le **sinus** du nombre réel x est l'ordonnée de M et on note **sin x** ou **sin(x)**.

2. Propriétés immédiates:**Propriétés :**

- $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ et $-1 \leq \cos(x) \leq 1$
- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
- $\sin(-x) = -\sin(x)$ et $\cos(-x) = \cos(x)$
- $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$ où k entier relatif
- $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$ où k entier relatif

Remarque : $(\sin(x))^2$, par exemple, se note $\sin^2(x)$

Démonstrations :

1) Le cercle trigonométrique est de rayon 1 donc :

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1 \text{ et } -1 \leq \cos(x) \leq 1.$$

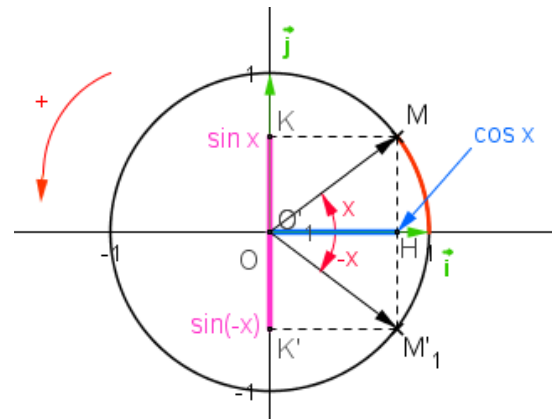
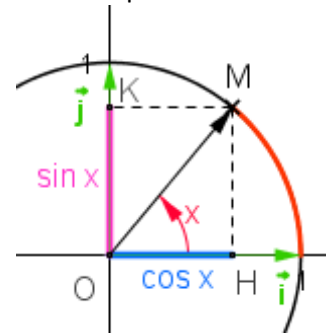
2) Dans le triangle OHM rectangle en H, le théorème de Pythagore permet d'établir que :

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = OM^2 = 1.$$

3) Les angles de mesures x et $-x$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses donc :

$$\sin(-x) = -\sin(x) \text{ et } \cos(-x) = \cos(x).$$

4) 5) Aux points de la droite orientée d'abscisses x et $x + 2k\pi$ ont fait correspondre le même point du cercle trigonométrique.

**3. Valeurs remarquables des fonctions sinus et cosinus :**

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Remarque : il faut absolument connaître ces valeurs par coeur ou utiliser un procédé mnémotechnique :

par exemple on remplit d'abord la 2^{ème} colonne, en écrivant $1 = \frac{\sqrt{4}}{2}$ et $0 = \frac{\sqrt{0}}{2}$ puis pour les cosinus, on fait décroître l'entier à l'intérieur de la racine et pour le sinus, on augmente l'entier à l'intérieur de la racine.

Utilisation de la calculatrice : Pour effectuer des calculs trigonométriques à l'aide de la calculatrice, il faut préalablement sélectionner l'unité de mesure d'angle (radian ou degré). Quand l'unité n'est pas précisé, on

considère que l'angle est en radian. Exemple : $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\tan(25^\circ) \approx 0,466$

III- Définition géométrique du produit scalaire

Vidéo : mathssa.fr/prodscal (de 0 à 5mns20s)

1. Norme d'un vecteur

Définition : Soit un vecteur $\vec{u}$ et deux points A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

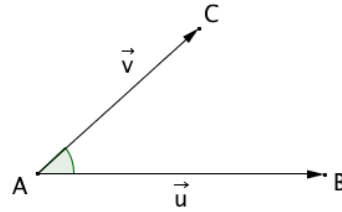
La **norme du vecteur** $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$, est la distance AB.

2. Définition du produit scalaire- 1^{ère} expression du produit scalaire

Définition : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

On appelle **produit scalaire** de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, le nombre réel défini par :

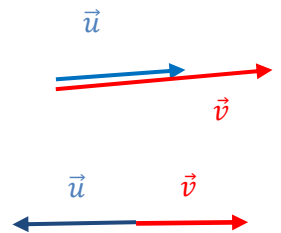
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, si l'un des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}; \vec{v}})$, dans le cas contraire.



$\vec{u} \cdot \vec{v}$ se lit " $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ ".

Remarques :

- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux représentants des vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ alors :
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\widehat{BAC})$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs colinéaires de même sens ,
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(0) = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs colinéaires de sens contraire ,
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\pi) = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$



- $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| = \|\vec{u}\|^2$

$\vec{u} \cdot \vec{u}$ se note aussi $\vec{u}^2$ et est appelé carré scalaire de $\vec{u}$.

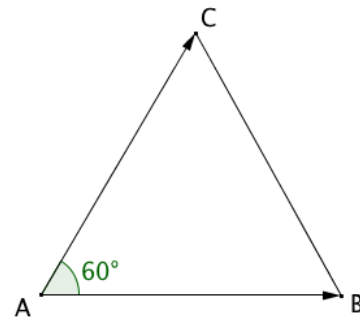
$$\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$$

Méthode : Calculer un produit scalaire à l'aide du cosinus

Soit un triangle équilatéral ABC de côté a .

Calculer, en fonction de a , le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\widehat{BAC}) \\ &= a \times a \times \cos(60) \\ &= 0,5a^2 \end{aligned}$$



Attention : Le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre réel. Écrire par exemple $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{0}$ est une maladresse à éviter !

Lire mais ne pas noter :

La notion de produit scalaire est apparue pour les besoins de la physique. Le concept relativement récent et a été introduit au milieu du XIX^e siècle par le mathématicien allemand *Hermann Grassmann* (1809 ; 1877). Il fut baptisé produit scalaire par *William Hamilton* (1805 ; 1865) en 1853.