CHAPITRE 5 – LE SECOND DEGRE 2ème partie

I-Forme canonique : rappel

Vidéo :mathssa.fr/seconddegre (3mns30s à 7 mns)

Propriété :
Pour tout polynome du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$, il existe deux réels α et β tels que
$ax^2 + bx + c =$ … … … … … … …
L'expression … … … … … … …. est la forme canonique du polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$

Non exigible !

DÉMONSTRATION Soit la fonction polynôme f telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a est un réel non nul.
En mettant le coefficient a en facteur, on obtient : $ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$
On peut considérer $x^2 + \frac{b}{a}x$ comme le début du développement du carré de $\left(x + \frac{b}{2a}\right)$:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} \text{ d'où } x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}$$

D'où : $f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$

$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$ (après réduction au même dénominateur)

$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ (en notant Δ le réel $b^2 - 4ac$)

$f(x) = a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{-\Delta}{4a}\right)$ soit $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = \frac{-\Delta}{4a}$.

Exemple : $f(x) = x^2 + 2x + 3 = x^2 + 2x +$ … $+ 2 =$ … … … … …. . $=$ … … … … ….

$a =$ …. , $\alpha =$ … , $\beta =$ ….

Définition :
soif f la fonction polynôme du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$.   (a non nul)
On appelle **discriminant** de f le réel $\Delta =$ … … … …..

Propriété :
$\alpha =$ … … … et $\beta =$ … … …. .
La forme canonique du polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$ est: $ax^2 + bx + c = a(x +$ ….$)^2 -$ … … .

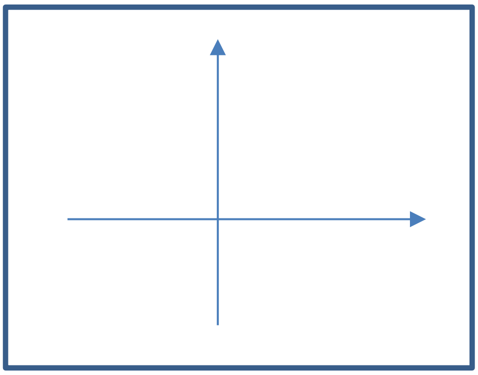
II – Variations et représentation graphique de $x \mapsto ax^2 + bx + c$

Vidéo : mathssa.fr/seconddegre (de 7 mns jusqu'à la fin)

Théorème :
Soit f le **polynôme du second degré** dont la forme canonique est $a(x-\alpha)^2+\beta$
Si … … alors f admet un …………………………… en x= … … de valeur … …
Si … …. alors f admet un …………………………… en x= … … de valeur … …

… … …

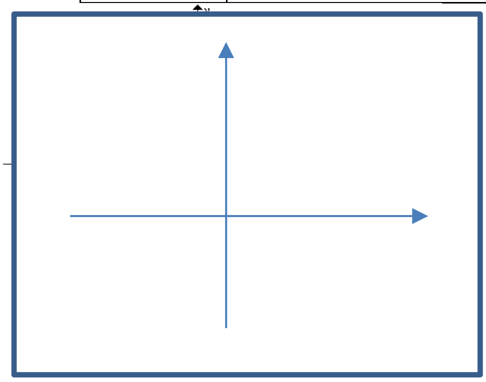
x	-∞	+∞
$f(x)$		



La courbe représentative de f est une ……………
dont les branches sont orientées vers …………..
de sommet S ………. d'axe de symétrie la droite d'équation ………………..

… … …

x	-∞	+∞
$f(x)$		

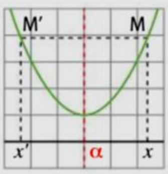


La courbe représentative de f est une ……………
dont les branches sont orientées vers …………..
de sommet S ………. d'axe de symétrie la droite d'équation ………………..

Preuve :

DÉMONSTRATION • On suppose $a > 0$. On a, pour tout réel x, $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.
Soit u et v deux réels tels que $\alpha \leqslant u \leqslant v$. On a alors $0 \leqslant u-\alpha \leqslant v-\alpha$ donc $(u-\alpha)^2 \leqslant (v-\alpha)^2$ puisque la fonction carré est croissante sur $[0\,;+\infty[$.
Le réel a étant positif, on en déduit que $a(u-\alpha)^2 \leqslant a(v-\alpha)^2$ puis que $a(u-\alpha)^2+\beta \leqslant a(v-\alpha)^2+\beta$ soit $f(u) \leqslant f(v)$. On a ainsi démontré que f est croissante sur l'intervalle $[\alpha\,;+\infty[$.
Soit u et v deux réels tels que $u \leqslant v \leqslant \alpha$. On a alors $u-\alpha \leqslant v-\alpha \leqslant 0$ donc $(u-\alpha)^2 \geqslant (v-\alpha)^2$ puisque la fonction carré est décroissante sur $]-\infty\,;0]$.
Le réel a étant positif, on en déduit que $a(u-\alpha)^2 \geqslant a(v-\alpha)^2$ puis que $a(u-\alpha)^2+\beta \geqslant a(v-\alpha)^2+\beta$ soit $f(u) \geqslant f(v)$. On a démontré que f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\alpha]$.
• On procède de la même façon pour $a < 0$.

DÉMONSTRATION **Axe de symétrie**
La fonction polynôme f peut s'écrire $f(x) = a(x-\alpha)^2+\beta$.
Soit $M\,(x, f(x))$ un point de la parabole P représentative de f dans un repère.
On note M' le symétrique de M par rapport à la droite d d'équation $x = \alpha$.
Les coordonnées $(x'\,;y')$ de M' vérifient $\frac{x+x'}{2} = \alpha$ et $y' = y$ car le milieu de $[MM']$ appartient à la droite d.



On a alors $x + x' = 2\alpha$ soit $x' = 2\alpha - x$.
On a : $f(x') = a(2\alpha - x - \alpha)^2 + \beta = a(\alpha - x)^2 + \beta = f(x)$ soit $f(x') = y = y'$: on en déduit que M' est un point de P.
On a donc démontré que P est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \alpha$.

Exercice d'application :

Soit f le polynôme du second degré défini par $f(x) = x^2 + 6x + 10$

Déterminer en justifiant les variations de f.

On identifie les coefficients a, b et c.

$a = \ldots, b = \ldots$ et $c = \ldots.$

On calcule le discriminant $\Delta =$ … … … … … = … … … … ….

$\alpha =$ … … … … … … … … …   et $\beta =$ … … … … … … ….

$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta$

$x^2 + 6x + 10 =$ … … … … … … …

$a > 0$ alors f admet un ………………………….. en x=…… de valeur ……

f est donc ……………………………………………………………………

x	-∞ +∞
$f(x)$	

III– Equations du second degré

Vidéo :mathssa.fr/seconddegre2(de 0 à 6mns)

Propriété :

Soit le **polynôme du second degré** ax^2+bx+c.Soit Δ son **discriminant** Δ =………..

- si Δ <0 alors l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$ ……………………………………
- si Δ =0 alors l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$ ………………………………………..

  ……………………………………….
- si Δ >0 alors l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$ …………………………………………..

……..

mathssa.fr/seconddegrecours

Preuve :

$f(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous sa forme canonique : $\Delta = b^2 - 4ac$

$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = -\dfrac{\Delta}{4a}$.

Donc :$ax^2 + bx + c = 0$ peut s'écrire :

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a} = 0$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

car a est non nul.

- Si $\Delta < 0$: Comme un carré ne peut être négatif $\left(\frac{\Delta}{4a^2} < 0\right)$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution.
- Si $\Delta = 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ peut s'écrire :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

L'équation n'a qu'une seule solution : $x_0 = \frac{-b}{2a}$

- Si $\Delta > 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est équivalente à :

$$x + \frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \quad \text{ou} \quad x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{b}{2a} \quad \text{ou} \quad x = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{b}{2a}$$

$$x = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

L'équation a deux solutions distinctes : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Exercice d'application : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

a) $x^2 - 3x + 4 = 0$	**b)** $5x^2 - 70x + 245 = 0$	**c)** $-3x^2 + x + 4 = 0$
a = … b = … c = …	a = … b = … c = …	a = … b = … c = …
Δ = ...	Δ = ...	Δ = ...
=	=	= ....
=	=	= ....
Δ .... 0 donc ………………………..	Δ .... 0 donc	Δ .... 0 donc ………………………..
………………………………………	………………………..	………………………………………
S = ……	………………………………………	………………………………………
	S = {……}	S = {…… ; ……}

IV – Factorisation et signe d'un polynôme du second degré

Vidéo :mathssa.fr/seconddegre2(de 6mns à 9 mns)

Propriété : Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = ax^2 + bx + c$.
- Si $\Delta = 0$: Pour tout réel x, on a : $f(x) =$ … … … … ..
- Si $\Delta > 0$: Pour tout réel x, on a : $f(x) =$ … … … … … … .....
- Si $\Delta < 0$, il n'existe pas de forme factorisée de f.

Vidéo :mathssa.fr/seconddegre2(de 9 mns jusqu'à la fin)

Remarques :

$ax^2 + bx + c = a\left((x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$.

- Si $\Delta < 0$ alors $-\frac{\Delta}{4a^2} > 0$ et $(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$. $f(x)$ est le produit de a par un nombre >0 (f est donc du signe de a)
- Si $\Delta = 0$ alors $f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2$. $f(x)$ est le produit de a par un nombre >0 sauf en $-\frac{b}{2a}$ où il s'annule (f est donc du signe de a sauf en x_0 où elle s'annule.)
- Si $\Delta > 0$ alors $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. $f(x)$ est du signe de a à l'extérieur de ses racines.

Propriété :

Soit le **polynôme du second degré** $f(x) = ax^2 + bx + c$. Son discriminant est $\Delta =$ … … … ....

- si $\Delta < 0$ alors f est du signe de ....

x	$-\infty$ $+\infty$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	………………..

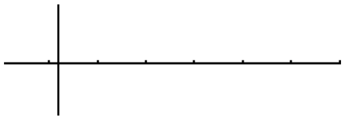
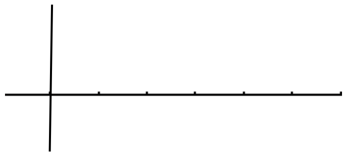
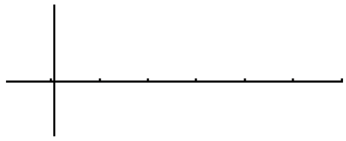
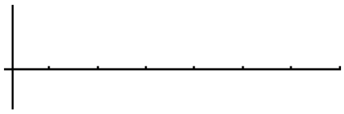
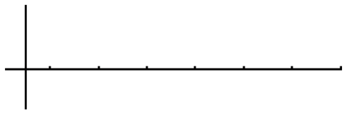
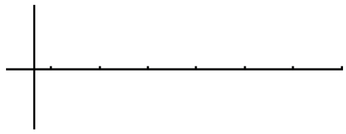
- si $\Delta = 0$ alors f est du signe de ..... sauf en … … où elle …………..

x	$-\infty$	…	$+\infty$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	……………..	…	………………….

- si $\Delta > 0$ alors f est du signe ………… « … »

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	… … … ….	0	… … … … … …	0	… … … … …

(si $x_1 < x_2$)

	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

Méthode : Résoudre une inéquation du second degré

Résoudre l'inéquation : $x^2 + 3x - 4 < 0$

a = ... b = ... c = ...

…………………………

……………………………………………………………………………………………

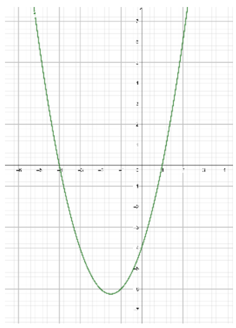
……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

On obtient le tableau de signes :

x	
$f(x) = x^2 + 3x - 4$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 + 3x - 4 < 0$ est donc $S =$ ... ...



Revoir les points essentiels