

CHAPITRE 5 – LE SECOND DEGRE 2ème partie

I-Forme canonique : rappel

Vidéo : mathssa.fr/seconddegree (3mns30s à 7 mns)

Propriété :

Pour tout polynôme du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$, il existe deux réels α et β tels que $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta$

L'expression $a(x - \alpha)^2 + \beta$ est la forme canonique du polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$

Non exigible !

DÉMONSTRATION Soit la fonction polynôme f telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a est un réel non nul.

En mettant le coefficient a en facteur, on obtient : $ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$

On peut considérer $x^2 + \frac{b}{a}x$ comme le début du développement du carré de $\left(x + \frac{b}{2a}\right)$:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} \text{ d'où } x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\text{D'où : } f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right]$$

$$f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] \text{ (après réduction au même dénominateur)}$$

$$f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] \text{ (en notant } \Delta \text{ le réel } b^2 - 4ac)$$

$$f(x) = a \left(x - \frac{-b}{2a} \right)^2 + \left(\frac{-\Delta}{4a} \right) \text{ soit } f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta \text{ avec } \alpha = \frac{-b}{2a} \text{ et } \beta = \frac{-\Delta}{4a}.$$

Exemple : $f(x) = x^2 + 2x + 3 = x^2 + 2x + 1 + 2 = (x + 1)^2 + 2 = 1(x - (-1))^2 + 2$.

$$a = 1, \alpha = -1, \beta = 2$$

Définition :

soit f la fonction polynôme du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$. (a non nul)

On appelle **discriminant** de f le réel $\Delta = b^2 - 4ac$

Propriété :

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = -\frac{\Delta}{4a}.$$

La forme canonique du polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$ est : $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$.

II – Variations et représentation graphique de $x \mapsto ax^2 + bx + c$

Vidéo : mathssa.fr/seconddgre (de 7 mns jusqu'à la fin)

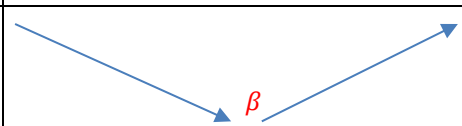
Théorème :

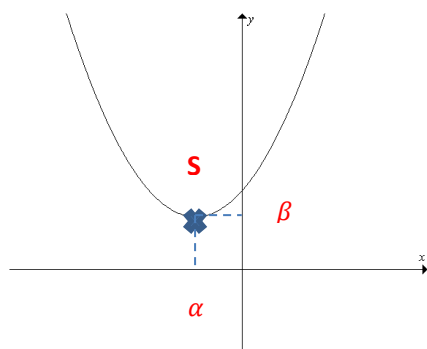
Soit f le **polynôme du second degré** dont la forme canonique est $a(x - \alpha)^2 + \beta$

Si $a > 0$ alors f admet un **minimum** en $x = \alpha$ de valeur β

Si $a < 0$ alors f admet un **maximum** en $x = \alpha$ de valeur β

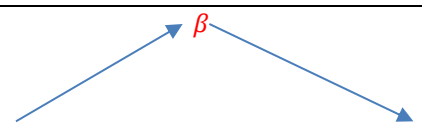
$a > 0$

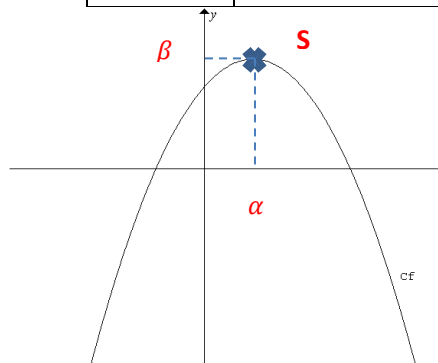
x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$			



La courbe représentative de f est une **parabole** dont les branches sont orientées vers **le haut** de sommet $S(\alpha; \beta)$ d'axe de symétrie la droite d'équation $x = \alpha$

$a < 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$			



La courbe représentative de f est une **parabole** dont les branches sont orientées vers **le bas** de sommet $S(\alpha; \beta)$ d'axe de symétrie la droite d'équation $x = \alpha$

Preuve :

DÉMONSTRATION

• On suppose $a > 0$. On a, pour tout réel x , $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.

Soit u et v deux réels tels que $\alpha \leq u \leq v$. On a alors $0 \leq u - \alpha \leq v - \alpha$ donc $(u - \alpha)^2 \leq (v - \alpha)^2$ puisque la fonction carré est croissante sur $[0; +\infty[$.

Le réel a étant positif, on en déduit que $a(u - \alpha)^2 \leq a(v - \alpha)^2$ puis que $a(u - \alpha)^2 + \beta \leq a(v - \alpha)^2 + \beta$ soit $f(u) \leq f(v)$. On a ainsi démontré que f est croissante sur l'intervalle $[\alpha; +\infty[$.

Soit u et v deux réels tels que $u \leq v \leq \alpha$. On a alors $u - \alpha \leq v - \alpha \leq 0$ donc $(u - \alpha)^2 \geq (v - \alpha)^2$ puisque la fonction carré est décroissante sur $]-\infty; 0]$.

Le réel a étant positif, on en déduit que $a(u - \alpha)^2 \geq a(v - \alpha)^2$ puis que $a(u - \alpha)^2 + \beta \geq a(v - \alpha)^2 + \beta$ soit $f(u) \geq f(v)$. On a démontré que f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty; \alpha]$.

• On procède de la même façon pour $a < 0$.

DÉMONSTRATION

Axe de symétrie

La fonction polynôme f peut s'écrire $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.

Soit $M(x, f(x))$ un point de la parabole P représentative de f dans un repère.

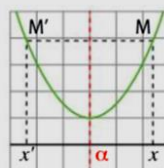
On note M' le symétrique de M par rapport à la droite d d'équation $x = \alpha$.

Les coordonnées $(x'; y')$ de M' vérifient $\frac{x + x'}{2} = \alpha$ et $y' = y$ car le milieu de $[MM']$ appartient à la droite d .

On a alors $x + x' = 2\alpha$ soit $x' = 2\alpha - x$.

On a : $f(x') = a(2\alpha - x - \alpha)^2 + \beta = a(\alpha - x)^2 + \beta = f(x)$ soit $f(x') = y = y'$: on en déduit que M' est un point de P .

On a donc démontré que P est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \alpha$.



Exercice d'application :

Soit f le polynôme du second degré défini par $f(x) = x^2 + 6x + 10$

Déterminer en justifiant les variations de f .

On identifie les coefficients a, b et c .

$$a = 1, b = 6 \text{ et } c = 10$$

On calcule le discriminant $\Delta = 6^2 - 4 \times 1 \times 10 = 36 - 40 = -4$.

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2} = -3 \quad \text{et} \quad \beta = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{-4}{4} = 1$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

$$x^2 + 6x + 10 = (x + 3)^2 + 1$$

$a > 0$ alors f admet un minimum en $x = -3$ de valeur 1.

f est donc *décroissante sur $]-\infty ; -3]$ et croissante sur $[3 ; +\infty[$*

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f(x)$		1	

III– Equations du second degré

Vidéo : mathssa.fr/seconddegre2 (de 0 à 6mns)

Propriété :

Soit le polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$. Soit Δ son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

- si $\Delta < 0$ alors l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution réelle.
- si $\Delta = 0$ alors l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ a une unique solution : $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
- si $\Delta > 0$ alors l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

mathssa.fr/seconddegre2

Preuve :

$f(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous sa forme canonique : $\Delta = b^2 - 4ac$

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta \quad \text{avec} \quad \alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = -\frac{\Delta}{4a}.$$

Donc : $ax^2 + bx + c = 0$ peut s'écrire :

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = 0$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

car a est non nul.

- Si $\Delta < 0$: Comme un carré ne peut être négatif $\left(\frac{\Delta}{4a^2} < 0\right)$, l'équation

$ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution.

- Si $\Delta = 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ peut s'écrire :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

L'équation n'a qu'une seule solution : $x_0 = \frac{-b}{2a}$

- Si $\Delta > 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est équivalente à :

$$x + \frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \quad \text{ou} \quad x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{b}{2a} \quad \text{ou} \quad x = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{b}{2a}$$

$$x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

L'équation a deux solutions distinctes : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

Exercice d'application : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

a) $x^2 - 3x + 4 = 0$

$a = 1 \quad b = -3 \quad c = 4$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 4$

$= 9 - 16$

$= -7$

$\Delta < 0$ donc l'équation $x^2 - 3x + 4 = 0$ n'a pas de solution réelle

$S = \emptyset$

b) $5x^2 - 70x + 245 = 0$

$a = 5 \quad b = -70 \quad c = 245$

$\Delta = (-70)^2 - 4 \times 5 \times 245$

$= 4900 - 4900$

$= 0$

$\Delta = 0$ donc l'équation $5x^2 - 70x + 245 = 0$ a une unique solution : $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-70}{10} = 7$.

$S = \{7\}$

c) $-3x^2 + x + 4 = 0$

$a = -3 \quad b = 1 \quad c = 4$

$\Delta = 1^2 - 4 \times (-3) \times 4$

$= 1 + 48$

$= 49$

$\Delta > 0$ donc l'équation $-3x^2 + x + 4 = 0$ a deux solutions distinctes :

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{49}}{2 \times (-3)} = \frac{-1 - 7}{-6} =$

$\frac{4}{3}$ ou $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + 7}{-6} = -1$

$S = \left\{\frac{4}{3}; -1\right\}$

IV – Factorisation et signe d'un polynôme du second degré

Vidéo : mathssa.fr/seconddegre2 (de 6mns à 9 mns)

Propriété : Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

- Si $\Delta = 0$: Pour tout réel x , on a : $f(x) = a(x - x_0)^2$.
- Si $\Delta > 0$: Pour tout réel x , on a : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- Si $\Delta < 0$, il n'existe pas de forme factorisée de f .

Vidéo : mathssa.fr/seconddegre2 (de 9 mns jusqu'à la fin)

Remarques :

$$ax^2 + bx + c = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right).$$

- Si $\Delta < 0$ alors $-\frac{\Delta}{4a^2} > 0$ et $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$. $f(x)$ est le produit de a par un nombre > 0 (f est donc du signe de a)
- Si $\Delta = 0$ alors $f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$. $f(x)$ est le produit de a par un nombre > 0 sauf en $-\frac{b}{2a}$ où il s'annule (f est donc du signe de a sauf en x_0 où elle s'annule.)
- Si $\Delta > 0$ alors $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. $f(x)$ est du signe de a à l'extérieur de ses racines.

Propriété :

Soit le **polynôme du second degré** $f(x) = ax^2 + bx + c$. Son discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac$.

- si $\Delta < 0$ alors f est du signe de a .

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	signe de a	

- si $\Delta = 0$ alors f est du signe de a sauf en x_0 où elle s'annule.

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	signe de a	0	signe de a

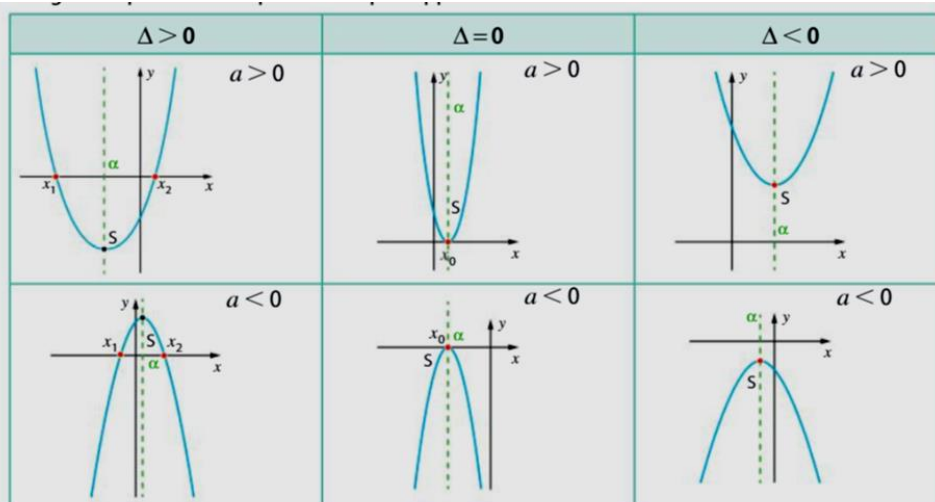
- si $\Delta > 0$ alors f est du signe de a « à l'extérieur de ses racines ».

X	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f(x) = ax^2 + bx + c$	$\text{signe de } a$	0	$\text{signe de } -a$	0	$\text{signe de } a$

(si $x_1 < x_2$)

Récapitulatif :**À noter**

Dans le cas $a > 0$, on dit que la parabole est « tournée vers le haut » ; dans le cas $a < 0$, on dit qu'elle est « tournée vers le bas ».

**Méthode : Résoudre une inéquation du second degré**

Résoudre l'inéquation : $x^2 + 3x - 4 < 0$

$$a = 1 \quad b = 3 \quad c = -4$$

$$\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 25$$

$\Delta > 0$ donc le polynôme du second degré $x^2 + 3x - 4$ a deux racines distinctes :

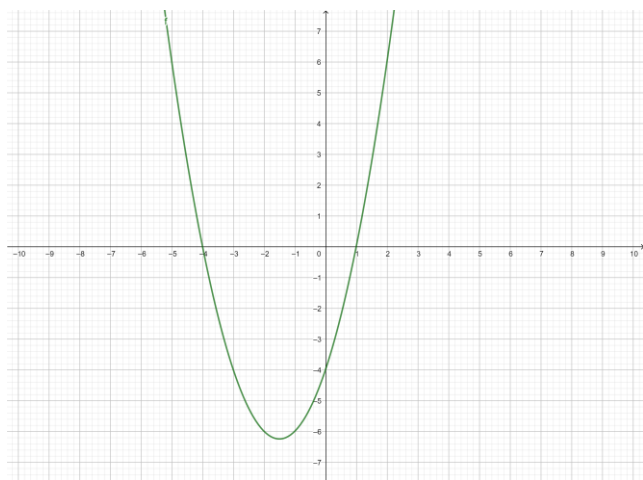
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{-3 - 5}{2} = -4 \quad \text{ou} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + 5}{2} = 1$$

$x^2 + 3x - 4$ est du signe de $a = 1$ à l'extérieur des racines

On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$	-4	1	$+\infty$	
$f(x) = x^2 + 3x - 4$	$+$	0	$-$	0	$+$

L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 + 3x - 4 < 0$ est donc $S =]-4; 1[$.



Revoir les points essentiels

