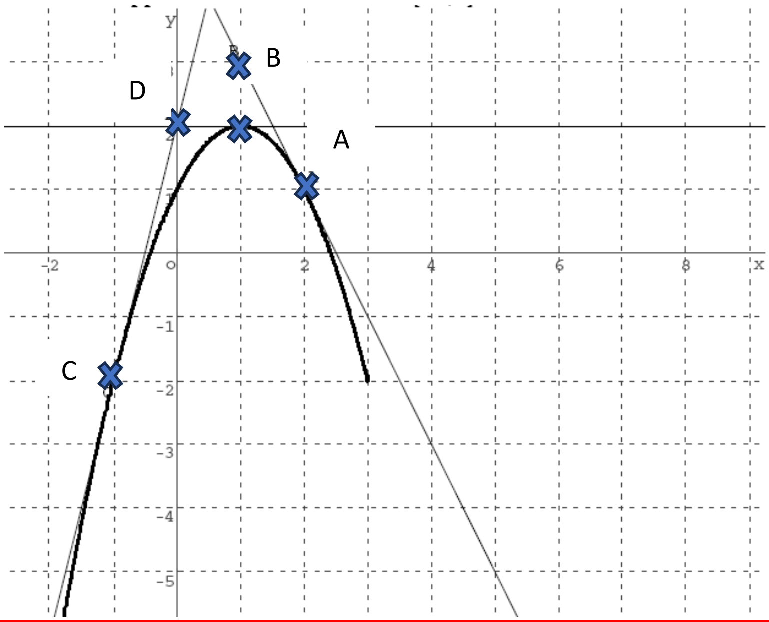
# CHAPITRE 6 – DERIVATION 2ème partie

## Rappels du chapitre 2

**Propriété :**
La **tangente** à la courbe $C_f$ au point A est la droite passant par A de …………………………….. le nombre dérivé $f'(a)$.

Exercice :Soit $f$ une fonction dérivable de courbe C représentée ci-dessous.
Sont représentées également les tangentes aux points d'abscisses $-1$ , $1$ *et* $2$. Déterminer, **en justifiant**, $f'(-1)$ , $f'(1)$ et $f'(2)$




$f'(-1)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe C au point d'abscisse $-1$.

$f'(-1) =$ … … … … … … … ..

$f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 1.
$f'(1) =$ … car cette droite est horizontale.

$f'(2)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 2.

$f'(2) =$ … … … … … … … ….

Propriété :
Une équation de la tangente à la courbe $C_f$ en A est : $y =$ … … … … … … … ….

| Fonction $f$ | Ensemble de définition de $f$ | Dérivée $f'$ | Ensemble de définition de $f'$ |
|---|---|---|---|
| $f(x) = a, a \in \mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $f'(x) =$ … | $\mathbb{R}$ |
| $f(x) = x$ | $\mathbb{R}$ | $f'(x) =$ … | $\mathbb{R}$ |
| $f(x) = x^2$ | $\mathbb{R}$ | $f'(x) =$ … | $\mathbb{R}$ |
| $f(x) = x^3$ | $\mathbb{R}$ | $f'(x) =$ … | $\mathbb{R}$ |
| $f(x) = \frac{1}{x}$ | $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ | $f'(x) =$ … | $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ |
| $f(x) = \sqrt{x}$ | $[0\,;\,+\infty[$ | $f'(x) =$ … | $]0\,;\,+\infty[$ |

**Exercice corrigé :** soit $f$ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

a)Donner pour tout réel $x > 0$, $f'(x)$.

b) Déterminer une équation de la tangente à la courbe de $f$ au point d'abscisse 1.

a)Pour tout réel $x > 0$, $f'(x) =$ … ..

b) une équation de la tangente à la courbe de $f$ au point d'abscisse 1 est : $y =$ … … … … … …

$f(1) =$ … … , $f'(1) =$ … …

$y =$ … … … … … …

$y =$ … … … … … …

$y =$ … … … … … …

# I – Opérations sur les dérivées :

**Avec géogebra :**

$f(x) = \text{Dérivée}(x^3)$
$\rightarrow 3x^2$

$g(x) = \text{Dérivée}(x^4)$
$\rightarrow 4x^3$

$h(x) = \text{Dérivée}(x^5)$
$\rightarrow 5x^4$

$p(x) = \text{Dérivée}(x^{-2})$
$\rightarrow \frac{-2}{x^3}$

$q(x) = \text{Dérivée}(x^{-3})$
$\rightarrow \frac{-3}{x^4}$

## 1. Fonction dérivée de $x \rightarrow x^n$ où $n$ est un entier relatif non nul

**Propriété :**
Soit $n$ est un entier naturel non nul.
La fonction $f$ définie par $f(x) = x^n$ est dérivable sur ℝ et pour tout réel $x$ ,
$f'(x) = \ldots\ldots\ldots$
Soit $n$ est un entier relatif strictement négatif ,
La fonction $f$ définie par $f(x) = x^n$ est dérivable sur $]-\infty\,;0[$ *et sur* $]0;+\infty[$ et pour tout réel $x$ *non nul* , $f'(x) = \ldots\ldots\ldots$

**Exemples :** La fonction $f$ définie par $f(x) = x^6$ est dérivable sur ℝ et pour tout réel $x$ ,
$f'(x) = \ldots\ldots\ldots$

La fonction $g$ définie par $g(x) = \frac{1}{x^5} = x^{\cdots}$ est dérivable sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel $x$ non nul , $g'(x) = \ldots\ldots\ldots$

## 2.Fonction dérivée d'une somme $u + v$ et d'un produit $ku$ où k est une constante

**Avec géogebra :**

$f(x) = \text{Dérivée}(x^2 + x)$
$\rightarrow 2x + 1$

$g(x) = \text{Dérivée}(5x^2)$
$\rightarrow 10x$

**Théorème :**
Si $u$ et $v$ sont **dérivables** sur I alors la fonction $u + v$ est **dérivable** sur I et $(u + v)'$ =… … …

Si $u$ est **dérivable** sur I alors la fonction $ku$ est **dérivable** sur I et $(ku)'$ = … … ..

**Preuve** : admis

**Exemple 1:** donner sans justifier la dérivée de la fonction $f$ définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x} + x + \sqrt{x}$
Pour tout $x$>0, $f'(x) = \ldots\ldots\ldots$
**Exemple 2:** donner sans justifier la dérivée de la fonction $f$ définie sur ℝ * par $f(x) = \frac{3}{x} = 3 \times \frac{1}{x}$
Pour tout $x$ non nul , $f'(x) = \ldots\ldots\ldots$

**Conséquence :**
Toute fonction **polynôme** est **dérivable** sur ℝ.

Idée de la preuve : une fonction polynôme est une somme de fonction du type « $kx^n$ ». Donc c'est une somme de fonctions dérivables sur ℝ et donc elle est dérivable sur ℝ

**Vidéo :mathssa.fr/derivepolynome.html (3mns)**

**Exercice:**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 5x + 12$ .Calculer $f'(x)$.

$f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que **fonction polynome.**
Pour tout réel $x$, $f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$

## 3. Fonction dérivée d'un produit

dérivée$(x^2 \cdot \sqrt{x})$

$$\to \frac{x^{-0.5}}{2} x^2 + 2 \times \sqrt{x}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}x^2 + 2x\sqrt{x}$$

$$= (\sqrt{x})' \times x^2 + (x^2)' \times \sqrt{x}$$

$$=(x^2)' \times \sqrt{x} + x^2 (\sqrt{x})'$$

**Théorème :**
Si $u$ et $v$ sont **dérivables** sur I alors la fonction $u\ v$ est **dérivable** sur I et $(uv)' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$

**Corollaire :**
Si $u$ est **dérivable** sur I alors la fonction $u^2$ est **dérivable** sur I $et\ (u^2)' = \ldots\ldots$

**Preuve : démonstration au programme vidéo :mathssa.fr/deriveuv.html (10mns)**

DEMONSTRATION AU PROGRAMME $r(h) = \frac{u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a)}{h}$

$= \frac{u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a+h) + u(a)v(a+h) - u(a)v(a)}{h}$

Ainsi, $r(h) = \frac{u(a+h)-u(a)}{h}v(a+h) + u(a)\frac{v(a+h)-v(a)}{h}$.

Or, $u$ est dérivable sur I donc $\lim\limits_{h\to 0}\frac{u(a+h)-u(a)}{h} = u'(a)$. De plus, $\lim\limits_{h\to 0} v(a+h) = v(a)$.

Donc $\lim\limits_{h\to 0}\frac{u(a+h)-u(a)}{h}v(a+h) = u'(a)\times v(a)$. De plus, $v$ est dérivable sur I donc

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{v(a+h)-v(a)}{h} = v'(a)$. Ainsi, $\lim\limits_{h\to 0} u(a)\frac{v(a+h)-v(a)}{h} = u(a)\times v'(a)$.

Par somme, on a $\lim\limits_{h\to 0} r(h) = u'(a)\times v(a) + u(a)\times v'(a)$.

Ainsi, $uv$ est dérivable en $a$ et $(uv)'(a) = u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$.

Donc $uv$ est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.

**vidéo :mathssa.fr/deriveuvexo.html (5mns35s)**

**Exercice 1**: soit $f$ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x\sqrt{x}$. Déterminer $f'(x)$.
$f$ est **dérivable** sur $]0;+\infty[$ car de la forme $u\ v$ où $u$ et $v$ sont dérivables $]0;+\infty[$.

Pour tout réel $x > 0$,

- $f = \ldots\ldots\ldots.$
- $u(x) = \ldots \quad v(x) = \ldots$
  $u'(x) = \cdots \quad v'(x) = \ldots$
- $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

…………………………………………….

**Exercice 2**: soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^3 + 1)^2$. Déterminer $f'(x)$.
$f$ est **dérivable** sur $\mathbb{R}$car de la forme $u^2$ où $u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

Pour tout réel $x$,

- $f$=… … ….
- $u(x) = …$ $u'(x) = …$
- … … … … … … … … …

……………………………………………..

## 4.Fonction dérivée d'un inverse, d'un quotient

**Théorème :**
Si $v$ est dérivable sur I et si pour tout $x \in$I, $v(x) \neq 0$ alors la fonction $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{v}\right)' = … ….$
Si $u$ et $v$ sont dérivables sur I et si pour tout $x \in$I, $v(x) \neq 0$ alors la fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et
$\left(\frac{u}{v}\right)' = … … …$

**Preuve : admis**

**vidéo :[mathssa.fr/derivee1surv.html](mathssa.fr/derivee1surv.html) (3mns41s)**

**Exercice 1**: soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3x^4+1}$. Déterminer $f'(x)$.
$f$ est **dérivable** sur $\mathbb{R}$ car de la forme $\frac{1}{v}$ où $v$ sont dérivables $\mathbb{R}$ $(v(x) \neq 0)$
Pour tout réel $x$,

- $f$=… … ….
- $v(x) = …$ $v'(x) = …$
- … … … … … … … … …

……………………………………………..

**vidéo :[mathssa.fr/deriveeusurv.html](mathssa.fr/deriveeusurv.html) (3mns41s)**

**Exercice 2**: soit $f$ la fonction définie sur $\left]\frac{4}{3};+\infty\right[$ par $f(x) = \frac{1-x^2}{3x-4}$. Déterminer $f'(x)$.
$f$ est **dérivable** sur $\left]\frac{4}{3};+\infty\right[$ car de la forme $\frac{u}{v}$ où $u$ $et$ $v$ sont dérivables $\mathbb{R}$ $(v(x) \neq 0\ sur\left]\frac{4}{3};+\infty\right[\ )$
Pour tout réel $x > \frac{4}{3}$,

- $f = ….$
- $u(x) = … … …$ $v(x) = … …$

  $u'(x) = …$ $v'(x) = …$

- $f' = … … … … ….$ $f'(x) = … … … … … … … … … … … … … … … … … … ….$

**Point méthode :**

Pour calculer la **dérivée** d'une fonction $f$, on doit

- Ecrire $f$ sous une forme connue (somme , produit , quotient…)
- Identifier les fonctions intermédiaires et leurs dérivées
- Calculer la dérivée en utilisant les formules de dérivation

## II– D'autres dérivées:

**Exercice d'introduction :**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (\sqrt{3}x + 1)^2$

1.Déterminer $f'(x)$ (dérivabilité admise)

Pour tout réel $x$,

- $f=$… … ….
- $u(x) =$ …     $u'(x) =$ …
- … … … … … … … … …

…………………………………………..

2.On appelle $g$ la fonction carrée. Exprimer $f(x)$ à l'aide de la fonction $g$. Exprimer ensuite $f'(x)$ à l'aide de la fonction $g'$.

………………………………………………………………………………………………

**1.Dérivée de la fonction $x \to g(ax+b)$**

$x \longrightarrow ax + b$

$X \longrightarrow g(X)$

$x - - - - - - \rightarrow g(ax + b)$

**Propriété :** $g$ est une fonction dérivable sur un intervalle J. $a$ et $b$ sont deux nombres réels.
Alors la fonction $x \to \boldsymbol{g(ax+b)}$ est dérivable sur l'intervalle pour lequel $ax + b \in J$ $et$ on a :

$(g(ax + b))' =$ … … … … … … . .

**Démonstration :admis**

**Exercice 1:**

Déterminer la dérivée de la fonction $f$ définie sur $]2; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{4x - 8}$ (dérivabilité admise)

$x \longrightarrow 4x - 8$

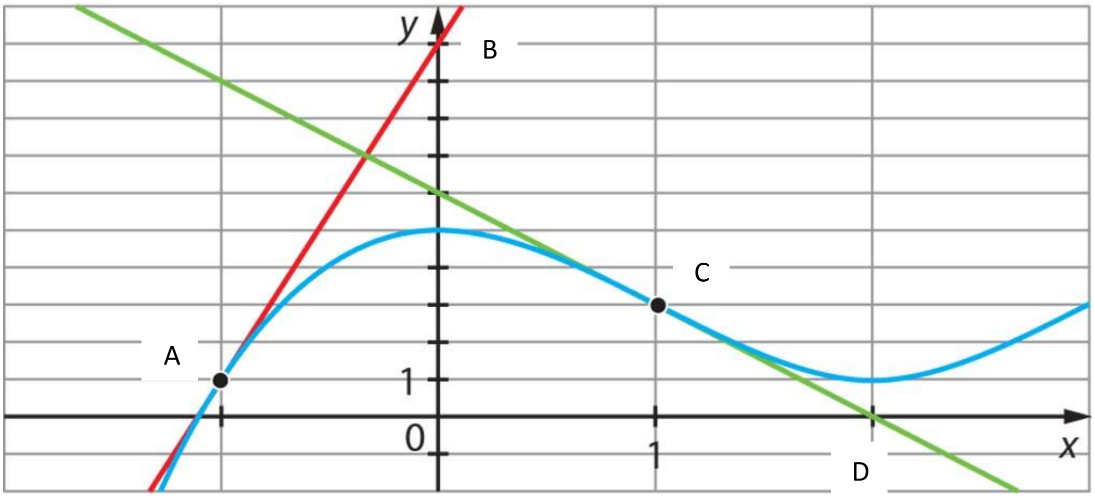
$X \xrightarrow{g} \sqrt{X}$

$x - - - - - - \rightarrow \sqrt{4x - 8}$

Pour tout réel $x > 2$, $(g(4x - 8))' =$………………………………………………………………………….

**Exercice 2 :**

$f$ est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa courbe représentative $C_f$ ainsi que les tangentes à $C_f$ aux points d'abscisses – 1 et 1 sont tracées ci-dessous.




1. Déterminer en justifiant $f'(-1)$ et $f'(1)$.

$f'(-1)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe C au point d'abscisse $-1$.

$f'(-1) =$ …………………..

$f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 1.

$f'(1) =$ …………………..

2.$g$ *est la* fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :$g(x) = f(2x-3)$ . Exprimer $g'(x)$ en fonction de $x$. (la dérivabilité est admise) puis en déduire $g'(1)$ et $g'(2)$

………………………………………………………………………………………

**2.Dérivée de la fonction valeur absolue**

**vidéo :mathssa.fr/valabsvar.html (5mns14s)**

Définition :
La **valeur absolue** d'un nombre $x$ notée $|x|$ est égal à $x$ si $x$ est positif, et à $-x$ si $x$ est négatif.

Exemples :
- La valeur absolue de –5 est égale à 5 soit $|-5| = 5$.
- La valeur absolue de 8 est égale à 8 $|8| = 8$.

Définition :
La **fonction valeur absolue** est la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$.

Propriété :
La fonction valeur absolue est **strictement décroissante** sur l'intervalle $]-\infty\,;0]$ et **strictement croissante** sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

Éléments de démonstration :

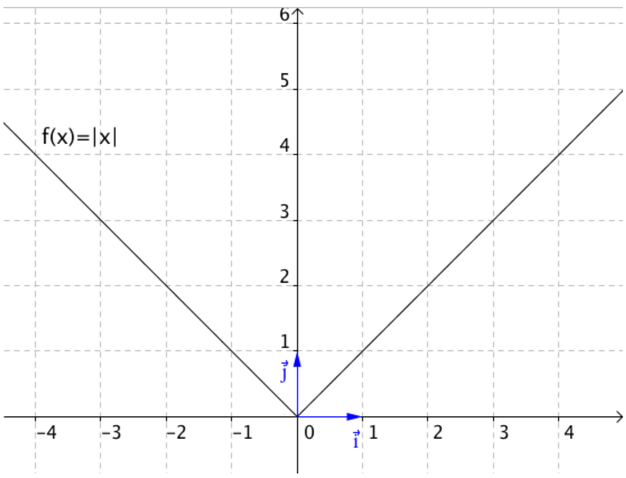
$$f(x) = \begin{cases} -x \ sur \ ]-\infty\,;0] \\ x \ sur \ [0\,;\,+\infty[ \end{cases}$$

Sur chacun des intervalles $]-\infty\,;0]$ et $[0\,;\,+\infty[$, la fonction $f$ est une fonction affine.

Représentation graphique :

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $x \mapsto \lvert x \rvert$ | ↘ | $0$ | ↗ |

Remarque :
Dans un repère orthogonal, la courbe de la fonction valeur absolue est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.




Étude de la dérivabilité en 0 :

Soit la fonction $f$ définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = |x|$.

On calcule le taux de variation de $f$ en 0 :

- Si $h > 0$, $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \dfrac{|0+h|-|0|}{h} = \dfrac{|h|}{h} = \dfrac{h}{h} = 1$

Car $|h| = h$, si $h > 0$.

- Si $h < 0$, $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \dfrac{|0+h|-|0|}{h} = \dfrac{|h|}{h} = \dfrac{-h}{h} = -1$

Car $|h| = -h$, si $h < 0$.

Donc : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}$ n'existe pas car dépend du signe de $h$.

La fonction valeur absolue n'est donc pas dérivable en 0.

En observant la courbe représentative de la fonction valeur absolue, on comprend bien qu'il n'existe pas de tangente à la courbe en 0.

Cependant, il est à noter que la fonction $x \mapsto |x|$ est dérivable en tout nombre différent de 0.