

CHAPITRE 6 – DERIVATION 2^{ème} partie

Rappels du chapitre 2

Propriété :

La **tangente** à la courbe C_f au point A est la droite passant par A de coefficient directeur le nombre dérivé $f'(a)$.

Exercice : Soit f une fonction dérivable de courbe C représentée ci-dessous.

Sont représentées également les tangentes aux points d'abscisses $-1, 1$ et 2 . Déterminer, **en justifiant**, $f'(-1)$, $f'(1)$ et $f'(2)$

$f'(-1)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe C au point d'abscisse -1 .

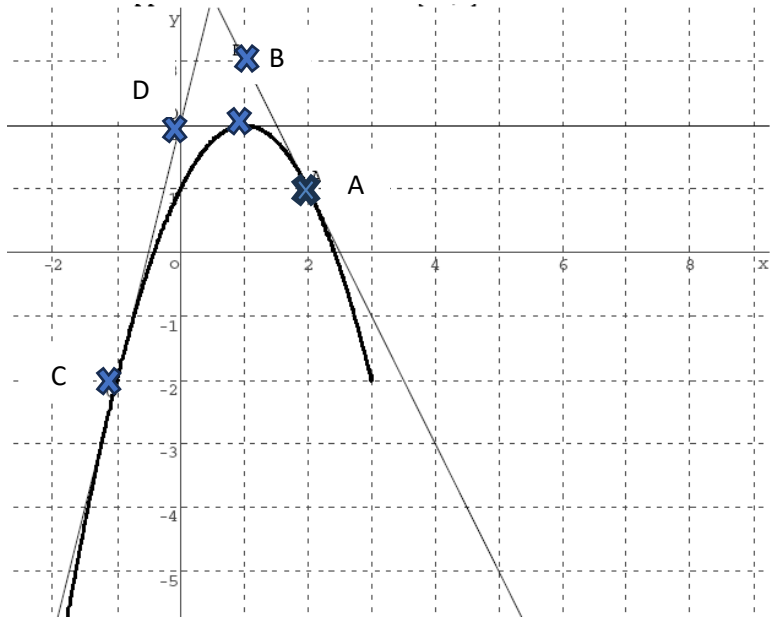
$$f'(-1) = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{2 - (-2)}{0 - (-1)} = 4$$

$f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 1.

$f'(1) = 0$ car cette droite est horizontale.

$f'(2)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 2.

$$f'(2) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 - 1}{1 - 2} = -2$$



Propriété :

Une équation de la tangente à la courbe C_f en A est : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Fonction f	Ensemble de définition de f	Dérivée f'	Ensemble de définition de f'
$f(x) = a, a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x, a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^3$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 3x^2$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$

Exercice corrigé : soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

a) Donner pour tout réel $x > 0$, $f'(x)$.

b) Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.

a) Pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

b) une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1 est : $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$

$$f(1) = \frac{1}{1} = 1, \quad f'(1) = -\frac{1}{1^2} = -1$$

$$y = -1(x - 1) + 1$$

$$y = -x + 1 + 1$$

$$y = -x + 2$$

I – Opérations sur les dérivées :

1. Fonction dérivée de $x \rightarrow x^n$ où n est un entier relatif non nul

Propriété :

Soit n est un entier naturel non nul.

La fonction f définie par $f(x) = x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x ,

$$f'(x) = f'(x) = nx^{n-1}$$

Soit n est un entier relatif strictement négatif,

La fonction f définie par $f(x) = x^n$ est dérivable sur $] -\infty; 0[$ et sur

$]0; +\infty[$ et pour tout réel x non nul, $f'(x) = f'(x) = nx^{n-1}$

Avec géogebra :

	$f(x) = \text{Dérivée}(x^3)$ $\rightarrow 3x^2$
	$g(x) = \text{Dérivée}(x^4)$ $\rightarrow 4x^3$
	$h(x) = \text{Dérivée}(x^5)$ $\rightarrow 5x^4$
	$p(x) = \text{Dérivée}(x^{-2})$ $\rightarrow \frac{-2}{x^3}$
	$q(x) = \text{Dérivée}(x^{-3})$ $\rightarrow \frac{-3}{x^4}$

Exemples : La fonction f définie par $f(x) = x^6$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x ,

$$f'(x) = 6x^5$$

La fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{x^5} = x^{-5}$ est dérivable sur $] -\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ et pour tout réel x non nul, $g'(x) = -5x^{-6} = \frac{-5}{x^6}$

2. Fonction dérivée d'une somme $u + v$ et d'un produit ku où k est une constante

Avec géogebra :

	$f(x) = \text{Dérivée}(x^2 + x)$ $\rightarrow 2x + 1$
	$g(x) = \text{Dérivée}(5x^2)$ $\rightarrow 10x$

Théorème :

Si u et v sont **dérivables** sur I alors la fonction $u + v$ est **dérivable** sur I et $(u + v)' = u' + v'$

Si u est **dérivable** sur I alors la fonction ku est **dérivable** sur I et $(ku)' = ku'$

Preuve : admis

Exemple 1 : donner sans justifier la dérivée de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x} + x + \sqrt{x}$

Pour tout $x > 0$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Exemple 2 : donner sans justifier la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{3}{x} = 3 \times \frac{1}{x}$

Pour tout x non nul, $f'(x) = 3 \times -\frac{1}{x^2} = \frac{-3}{x^2}$

Conséquence :

Toute fonction **polynôme** est **dérivable** sur $\mathbb{R}$.

Idée de la preuve : une fonction polynôme est une somme de fonction du type « kx^n ». Donc c'est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$

Vidéo : mathssa.fr/derivepolynome.html (3mns)

Exercice:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 5x + 12$. Calculer $f'(x)$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que **fonction polynome**.

Pour tout réel x , $f'(x) = 3 \times 3x^2 - 4 \times 2x + 5 \times 1 + 0 = 9x^2 - 8x + 5$.

3. Fonction dérivée d'un produit

dérivée $(x^2 \cdot \sqrt{x})$

$$\begin{aligned} &\rightarrow \frac{x^{-0.5}}{2} x^2 + 2x \sqrt{x} \\ &\quad \frac{1}{2\sqrt{x}} x^2 + 2x\sqrt{x} \\ &= (\sqrt{x})' \times x^2 + (x^2)' \times \sqrt{x} \\ &= (x^2)' \times \sqrt{x} + x^2 (\sqrt{x})' \end{aligned}$$

Théorème :

Si u et v sont **dérivables** sur I alors la fonction $u v$ est **dérivable** sur I et $(uv)' = u'v + uv'$

Corollaire :

Si u est **dérivable** sur I alors la fonction u^2 est **dérivable** sur I et $(u^2)' = 2u'u$

Preuve : démonstration au programme vidéo : mathssa.fr/deriveuv.html (10mns)

DEMONSTRATION AU PROGRAMME

$$\begin{aligned} r(h) &= \frac{u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a)}{h} \\ &= \frac{u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a+h) + u(a)v(a+h) - u(a)v(a)}{h} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } r(h) = \frac{u(a+h) - u(a)}{h} v(a+h) + u(a) \frac{v(a+h) - v(a)}{h}.$$

Or, u est dérivable sur I donc $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(a+h) - u(a)}{h} = u'(a)$. De plus, $\lim_{h \rightarrow 0} v(a+h) = v(a)$.

Donc $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(a+h) - u(a)}{h} v(a+h) = u'(a) \times v(a)$. De plus, v est dérivable sur I donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(a+h) - v(a)}{h} = v'(a). \text{ Ainsi, } \lim_{h \rightarrow 0} u(a) \frac{v(a+h) - v(a)}{h} = u(a) \times v'(a).$$

Par somme, on a $\lim_{h \rightarrow 0} r(h) = u'(a) \times v(a) + u(a) \times v'(a)$.

Ainsi, uv est dérivable en a et $(uv)'(a) = u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$.

Donc uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.

vidéo : mathssa.fr/deriveuvexo.html (5mns35s)

Exercice 1: soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x\sqrt{x}$. Déterminer $f'(x)$.

f est **dérivable** sur $]0; +\infty[$ car de la forme $u v$ où u et v sont dérivables $]0; +\infty[$.

Pour tout réel $x > 0$,

- $f = u v$
- $u(x) = x \quad v(x) = \sqrt{x}$
 $u'(x) = 1 \quad v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $f' = u'v + uv'$

$$f'(x) = 1\sqrt{x} + x \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x}}$$

Exercice 2: soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^3 + 1)^2$. Déterminer $f'(x)$.
 f est **dérivable** sur $\mathbb{R}$ car de la forme u^2 où u est dérivable sur $\mathbb{R}$

Pour tout réel x ,

- $f = u^2$
- $u(x) = x^3 + 1$
 $u'(x) = 3x^2$
- $f' = 2u'u$
 $f'(x) = 2 \times 3x^2 \times (x^3 + 1) = 6x^2(x^3 + 1)$

4. Fonction dérivée d'un inverse, d'un quotient

Théorème :

Si v est dérivable sur I et si pour tout $x \in I$, $v(x) \neq 0$ alors la fonction $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$

Si u et v sont dérivables sur I et si pour tout $x \in I$, $v(x) \neq 0$ alors la fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Preuve : admis

vidéo : mathssa.fr/derivee1surv.html (3mns41s)

Exercice 1: soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3x^4 + 1}$. Déterminer $f'(x)$.

f est **dérivable** sur $\mathbb{R}$ car de la forme $\frac{1}{v}$ où v sont dérivables $\mathbb{R}$ ($v(x) \neq 0$)

Pour tout réel x ,

- $f = \frac{1}{v}$
- $v(x) = 3x^4 + 1$
 $v'(x) = 3 \times 4x^3 + 0 = 12x^3$
- $f' = -\frac{v'}{v^2} \quad f'(x) = -\frac{12x^3}{(3x^4 + 1)^2}$

vidéo : mathssa.fr/deriveeusurv.html (3mns41s)

Exercice 2: soit f la fonction définie sur $]\frac{4}{3}; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1-x^2}{3x-4}$. Déterminer $f'(x)$.

f est **dérivable** sur $]\frac{4}{3}; +\infty[$ car de la forme $\frac{u}{v}$ où u et v sont dérivables $\mathbb{R}$ ($v(x) \neq 0$ sur $]\frac{4}{3}; +\infty[$)

Pour tout réel $x > \frac{4}{3}$,

- $f = \frac{u}{v}$
- $u(x) = 1 - x^2 \quad v(x) = 3x - 4$
 $u'(x) = -2x \quad v'(x) = 3$
- $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad f'(x) = \frac{-2x(3x-4) - (1-x^2)3}{(3x-4)^2} = \frac{-6x^2 + 8x - 3 + 3x^2}{(3x-4)^2} = \frac{-3x^2 + 8x - 3}{(3x-4)^2}$

Point méthode :

Pour calculer la **dérivée** d'une fonction f , on doit

- Ecrire f sous une forme connue (somme , produit , quotient...)
- Identifier les fonctions intermédiaires et leurs dérivées
- Calculer la dérivée en utilisant les formules de dérivation

II– D'autres dérivées:**Exercice d'introduction :**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (\sqrt{3}x + 1)^2$

1.Déterminer $f'(x)$ (dérivabilité admise)

- $f = u^2$
- $u(x) = \sqrt{3}x + 1$
 $u'(x) = \sqrt{3}$
- $f' = 2u'u$
 $f'(x) = 2 \times \sqrt{3} \times (\sqrt{3}x + 1) = 2\sqrt{3}(\sqrt{3}x + 1)$

2.On appelle g la fonction carrée. Exprimer $f(x)$ à l'aide de la fonction g . Exprimer ensuite $f'(x)$ à l'aide de la fonction g' .

$$f(x) = g(\sqrt{3}x + 1) \text{ et } f'(x) = \sqrt{3} g'(\sqrt{3}x + 1)$$

1.Dérivée de la fonction $x \rightarrow g(ax + b)$

$$x \longrightarrow ax + b$$

$$X \longrightarrow g(X)$$

$$x \text{ --- } \longrightarrow g(ax + b)$$

Propriété : g est une fonction dérivable sur un intervalle J . a et b sont deux nombres réels.

Alors la fonction $x \rightarrow g(ax + b)$ est dérivable sur l'intervalle pour lequel $ax + b \in J$ et on a :

$$(g(ax + b))' = ag'(ax + b)$$

Démonstration : admis**Exercice 1:**

Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $]2; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{4x - 8}$ (dérivabilité admise)

$$x \longrightarrow 4x - 8$$

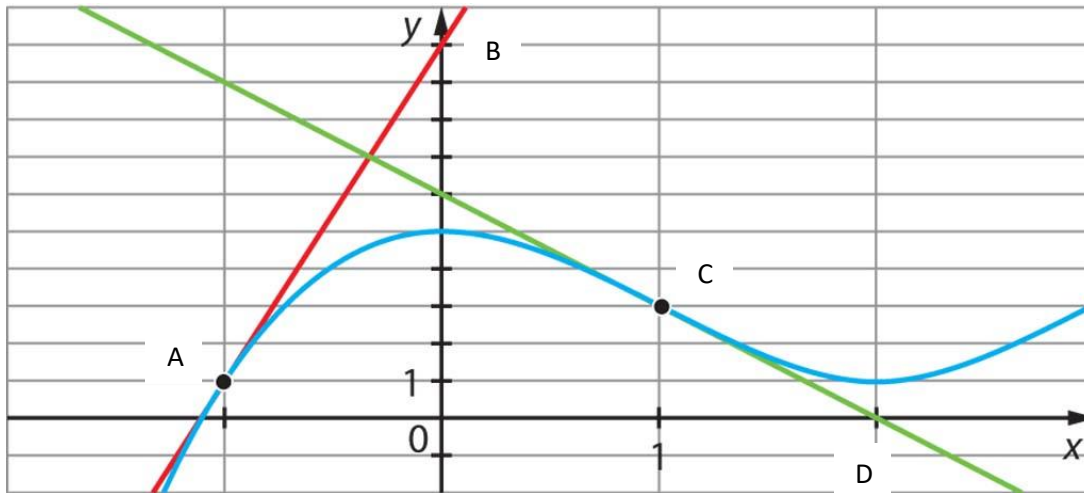
$$X \xrightarrow{g} \sqrt{X}$$

$$x \text{ --- } \longrightarrow \sqrt{4x - 8}$$

$$\text{Pour tout réel } x > 2, (g(4x - 8))' = 4 \times g'(4x - 8) = 4 \times \frac{1}{2\sqrt{4x-8}} \quad g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Exercice 2 :

f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa courbe représentative C_f ainsi que les tangentes à C_f aux points d'abscisses -1 et 1 sont tracées ci-dessous.



1. Déterminer en justifiant $f'(-1)$ et $f'(1)$.

$f'(-1)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe C au point d'abscisse -1 .

$$f'(-1) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{10 - 1}{0 - (-1)} = 9$$

$f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 1 .

$$f'(1) = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{0 - 3}{2 - 1} = -3$$

2. g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = f(2x - 3)$. Exprimer $g'(x)$ en fonction de x . (la dérivabilité est admise) puis en déduire $g'(1)$ et $g'(2)$

Pour tout réel x , $g'(x) = 2f'(2x - 3)$. $g'(1) = 2 \times f'(-1) = 18$, $g'(2) = 2 \times f'(1) = -6$

2. Dérivée de la fonction valeur absolue

vidéo : mathssa.fr/valabsvar.html (5mns14s)

Définition :

La **valeur absolue** d'un nombre x notée $|x|$ est égal à x si x est positif, et à $-x$ si x est négatif.

Exemples :

- La valeur absolue de -5 est égale à 5 soit $|-5| = 5$.
- La valeur absolue de 8 est égale à 8 $|8| = 8$.

Définition :

La **fonction valeur absolue** est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$.

Propriété :

La fonction valeur absolue est **strictement décroissante** sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$ et **strictement croissante** sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Éléments de démonstration :

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{sur }]-\infty ; 0] \\ x & \text{sur } [0 ; +\infty[\end{cases}$$

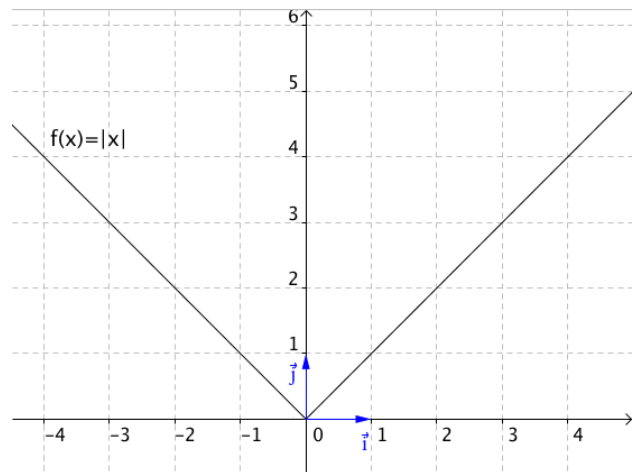
Sur chacun des intervalles $]-\infty ; 0]$ et $[0 ; +\infty[$, la fonction f est une fonction affine.

Représentation graphique :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$x \mapsto x $		0	

Remarque :

Dans un repère orthogonal, la courbe de la fonction valeur absolue est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



Étude de la dérivabilité en 0 :

Soit la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = |x|$.

On calcule le taux de variation de f en 0 :

$$\text{- Si } h > 0, \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{|0+h|-|0|}{h} = \frac{|h|}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

Car $|h| = h$, si $h > 0$.

$$\text{- Si } h < 0, \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{|0+h|-|0|}{h} = \frac{|h|}{h} = \frac{-h}{h} = -1$$

Car $|h| = -h$, si $h < 0$.

Donc : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$ n'existe pas car dépend du signe de h .

La fonction valeur absolue n'est donc pas dérivable en 0.

En observant la courbe représentative de la fonction valeur absolue, on comprend bien qu'il n'existe pas de tangente à la courbe en 0.

Cependant, il est à noter que la fonction $x \mapsto |x|$ est dérivable en tout nombre différent de 0.