CHAPITRE 7 – LES SUITES 1ère partie

I-Généralités – les différents mode de génération

1.Définition :

Notation

La suite u est souvent notée (u_n) et parfois $(u(n))$.

DÉFINITION Une suite u de nombres réels est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ dont la variable est un entier naturel. L'image par u d'un entier naturel n est notée u_n ou $u(n)$ et se lit « u indice n » ou « u de n ». u_n est le terme général de la suite.

L'ensemble de définition d'une suite est donc $\mathbb{N}$ ou une partie de $\mathbb{N}$ lorsque la suite n'est définie que pour les entiers supérieurs à une valeur donnée.

Exemple : la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n $, par\ u_n = \frac{1}{n^2+1}$

Calculer le 1er terme de la suite, le terme d'indice 3, puis le terme d'indice 5 et enfin le 5ème terme de la suite.

$u_0 = \frac{1}{0^2+1} = 1$, $u_3 = \frac{1}{3^2+1} = \frac{1}{10}$, $u_5 = \frac{1}{5^2+1} = \frac{1}{26}$, $u_4 = \frac{1}{4^2+1} = \frac{1}{17}$

Remarque :

- Il ne faut confondre la suite (u_n)et le terme d'indice n : u_n.
- Il ne faut pas confondre le $n^{ième}$ terme de la suite : u_{n-1} et le terme d'indice n : u_n (lorsque le 1er terme est u_0)

Exercice

1. Soit u une suite telle que $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_2 = 5$, $u_3 = 10$, $u_4 = 17$.
Déterminer ce que pourrait être le 10ième terme de la suite.

$u_0 = 0^2 + 1$, $u_1 = 1^2 + 1$, $u_2 = 2^2 + 1$, $u_3 = 3^2 + 1$, $u_4 = 4^2 + 1$

Il semble que $u_n = n^2 + 1$. $u_9 = 9^2 + 1 = 82$

2. Soit u une suite telle que $u_0 = 3$, $u_1 = 7$, $u_2 = 15$, $u_3 = 31$, $u_4 = 63$.
Déterminer ce que pourrait être le 7ième terme de la suite.

$u_1 = 2u_0 + 1$, $u_2 = 2u_1 + 1$, $u_3 = 2u_2 + 1$, $u_4 = 2u_3 + 1$

Il semble que $u_{n+1} = 2u_n + 1$.
$u_5 = 2u_4 + 1 = 127$
$u_6 = 2u_5 + 1 = 255$

2.Les modes de génération d'une suite

a)Formule explicite

Explicite : la suite (u_n) est définie par la relation $u_n = f(n)$ où f est une fonction de la variable n.

EXEMPLE : Considérons la suite définie pour tout naturel n par $u_n = n^2 + 7n - 3$, $u_n = f(n)$ où $f(x) = x^2 + 7x - 3$; $u_0 = f(0) = -3$, $u_1 = f(1) = 5$, $u_{100} = f(100) = 10\,697$.

b)Formule ou relation de récurrence

Par relation de récurrence : la suite (u_n) est alors définie par son premier terme et une relation permettant de calculer un terme à partir d'un ou plusieurs termes précédents. La relation peut être donnée par une formule explicite ou par un algorithme.

EXEMPLE : Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et la relation $u_{n+1} = 3u_n + 2$, pour tout naturel n.
On obtient $u_1 = 3u_0 + 2 = 3 \times 1 + 2 = 5$ et $u_2 = 3 \times u_1 + 2 = 3 \times 5 + 2 = 17$.

c)Par un algorithme :

À noter
u_{n-1} est le terme précédant u_n.
u_{n+1} est le terme suivant u_n.

Par un algorithme : la suite (u_n) est alors définie par son premier terme et des instructions d'une boucle **Pour**, qui permettent de calculer les termes suivants.

EXEMPLE : On considère la suite (u_n) de l'exemple précédent. L'algorithme suivant permet de calculer le terme de rang N de cette suite.
La valeur de u_0 est entrée dans la variable A.
Dans la boucle **Pour**, on calcule d'abord $3u_0 + 2$, c'est-à-dire u_1.
Puis de la même façon, on calcule u_2, u_3, etc.
Après N étapes dans la boucle, la variable A contient le terme u_N.

$A \leftarrow 1$
Pour i variant de 1 à N
  $|A \leftarrow 3 \times A + 2$
Fin Pour

Remarques :

- Derrière un algorithme se cache une formule explicite ou une relation de récurrence.

Par exemple, l'algorithme ci -dessus est associé à la suite définie par la formule de récurrence :
$u_{n+1} = 3u_n + 2$ et $u_0 = 1$

- On peut construire des algorithmes plus perfectionnés. On peut en effet stocker les termes successifs d'une suite dans une liste….

À noter
Une liste est un type de variables pouvant contenir un très grand nombre d'éléments.

EXEMPLE : On considère l'algorithme ci-dessous qui permet de déterminer la liste des premiers termes de la suite (u_n) telle que $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n^2 - 5$ pour tout entier naturel n.

Algorithme	
$A \leftarrow 0$	La variable A est initialisée à u_0 soit ici 0.
$L \leftarrow [A]$	Au début, la liste L contient un seul élément u_0.
Pour i variant de 1 à N	
$\quad A \leftarrow A^2 - 5$	On calcule un terme à partir du terme précédent contenu dans A.
$\quad L \leftarrow L + [A]$	Le terme calculé est inséré dans la liste L.
Fin Pour	À la fin, la liste L contient tous les termes de la suite de u_0 jusqu'à u_N.

Affichons dans une liste les 6 premiers termes de cette suite $(u_0, \ldots\ u_5)$

```python
A=0
L=[A]
for i in range(1,6):
    A=A**2-5
    L=L+[A]
print(L)
```

Console Python

```
*** Console de processus distant Réinitialisée ***
[0, -5, 20, 395, 156020, 24342240395]
>>>
```

Python ne prend pas la dernière valeur de la boucle itérative !!!

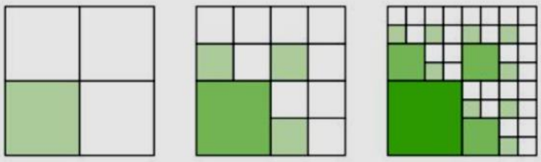
d)Par un motif géométrique :

Par un motif géométrique : la suite (u_n) est alors définie comme une quantité géométrique (longueur, angle, etc.) dans une figure où un motif particulier se répète.

EXEMPLE : On colorie un carré de 4 cm de côté en plusieurs étapes.

- À la première étape, on partage le carré en quatre carrés de même aire et on colorie le carré situé en bas à gauche : l'aire de la surface totale coloriée est 4 cm². On note $a_1 = 4$.
- À la deuxième étape, on partage chaque carré non encore colorié en quatre carrés de même aire et on colorie dans chacun, le carré situé en bas à gauche : l'aire de la surface totale coloriée est 7 cm². On note $a_2 = 7$.
- On poursuit les étapes du coloriage en continuant le même procédé.
- À l'aide de ce motif géométrique, on définit une suite numérique en notant, pour tout entier naturel n non nul, a_n l'aire de la surface totale coloriée après la n-ième étape de coloriage.

On peut vérifier que $a_3 = \frac{37}{4}$ soit $a_3 = 9{,}25$.



Étape 1 Étape 2 Étape 3

mathssa.fr/suite1 (calcul des 1ers termes d'une suite – 8mns)

3.Générer une suite sur sa calculatrice

mathssa.fr/suite2 (suite explicite – 3mns)

mathssa.fr/suite3(suite récurrente – évolution des TI on peut écrire directement u_{n+1} en fonction de u_n - 4mns)

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = -3u_n + 7 \end{cases}$

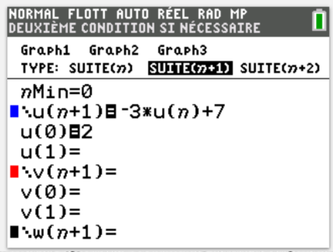
On veut afficher, à l'aide de la calculatrice, les termes u_0 à u_{15}.

Calculatrice TEXAS INSTRUMENT vidéos (1) (2) 06:54

1. Appuyer sur la touche **mode** pour accéder à l'écran.

À la cinquième ligne, sélectionner le mode **SUITE**. Appuyer sur **entrer**.

2. Appuyer sur la touche **f(x)** et compléter l'écran.

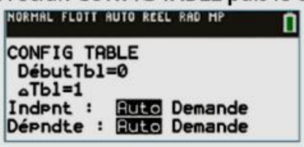


u_{n-1} est obtenu en utilisant successivement les touches : **2nde** **7** **(** **X, T, θ, n** **–** **1** **)**

***n*Min** est l'indice du premier terme.

***u*(0)** est la valeur du premier terme.

3. Choisir l'instruction **déf table** (touches **2nde** **fenêtre**) pour accéder à l'écran **CONFIG TABLE** puis le compléter.



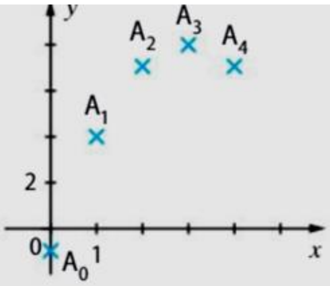
4. Choisir l'instruction **table** (touches **2nde** **graphe**) pour obtenir le tableau des valeurs des premiers termes de (u_n).

II – Approfondissement : représentation , sens de variation

1.Représentation graphique d'une suite

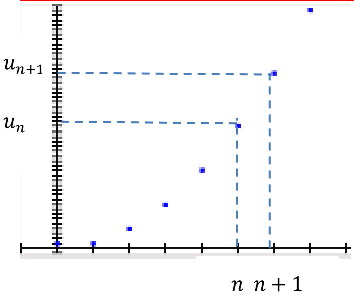
On peut placer les points de coordonnées $A_n(n\,;u_n)$ dans un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ du plan.

EXEMPLE : La représentation graphique ci-contre est celle des premiers termes de la suite (u_n), définie pour tout entier naturel n par $u_n = -n^2 + 6n - 1$. Comme $u_0 = -1$, $u_1 = 4$, $u_2 = 7$, $u_3 = 8$, $u_4 = 7$, …, on obtient les points $A_0(0\,;-1)$, $A_1(1\,;4)$, $A_2(2\,;7)$, $A_3(3\,;8)$, $A_4(4,7)$.

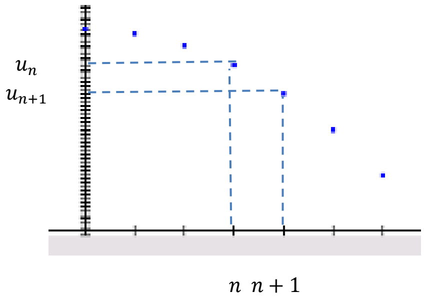


mathssa.fr/suite4

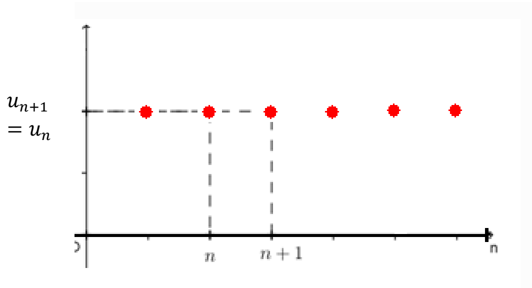
2.Sens de variation d'une suite



Suite croissante



Suite décroissante



Suite constante

Sens de variation d'une suite

DÉFINITIONS
- La suite u est dite **croissante** si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
- La suite u est dite **décroissante** si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leqslant u_n$.
- La suite u est dite **constante** si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n$.
- Une suite est **monotone** si elle est, soit croissante, soit décroissante, soit constante.

À noter
Pour conjecturer le comportement de la suite, on peut faire une table de valeurs des premiers termes.

EXEMPLES :
- La suite des entiers impairs 1 ; 3 ; 5… est une suite croissante, donc monotone.
- La suite des décimales de π : 3 ; 1 ; 4 ; 1 ; 5 ; 9 ; 2… n'est pas monotone.

Remarques importantes:

- $u_{n+1} \geq u_n$ équivaut à $u_{n+1} - u_n \geq 0$ $u_{n+1} \leq u_n$ équivaut à $u_{n+1} - u_n \leq 0$

  Ainsi pour étudier la monotonie d'une suite , il suffit d'étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$

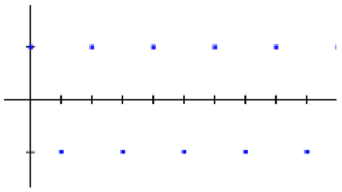
- On suppose que la suite (u_n) est définie par $u_n = f(n)$ avec f fonction définie sur [0 ;+∞[.
Supposons f croissante sur [0 ;+∞[.

x	0 $\qquad$ n $\qquad$ $n+1$ $\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	$u_n = f(n)$ $\nearrow$ $u_{n+1} = f(n+1)$

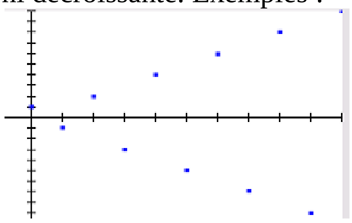
Il est clair que si $n \leq n+1$ *alors* $f(n) \leq f(n+1)$ *soit* $u_n \leq u_{n+1}$ *et* $u_{n+1} \geq u_n$

- On peut aussi parler de suites strictement croissante ou strictement décroissante en imposant des inégalités strictes dans la définition. Intuitivement, une suite strictement croissante « monte en permanence » alors qu'une suite croissante « monte » sauf en certains endroits où elle admet des « paliers »

- Il existe des suites ni croissante ni décroissante. Exemples :



La suite $(-1)^n$



La suite $n(-1)^n$

Propriété:

- Si , pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \geq 0$ alors la suite (u_n) est croissante
- Si , pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \leq 0$ alors la suite (u_n) est décroissante
- Si , pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = 0$ alors la suite (u_n) est constante

Propriété:

Ainsi lorsqu'une suite (u_n) est définie par $u_n = f(n)$ avec f fonction
Si f croissante sur [0 ;+∞[alors la suite (u_n) est croissante
Si f décroissante sur [0 ;+∞[alors la suite (u_n) est décroissante

Point méthode :pour étudier le **sens de variation** d'une suite, on peut :

- Soit étudier le **signe de** $u_{n+1} - u_n$ pour tout entier naturel n
- Soit lorsque la suite est définie par $u_n = f(n)$, utiliser le tableau de variations de la fonction f

Exercice corrigé :

1.Soit la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n , par $u_n = 3(n+1)^2 + 4$.
On remarque que $u_n = f(n)$ où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3(x+1)^2 + 4$
a)Dresser le tableau de variations de f.

$f(x) = 3(x-(-1))^2 + 4$ est la forme canonique de f. $a = 3$, $\alpha = -1$ et $\beta = 4$
Comme $3 > 0$, alors f est strictement décroissante sur]-∞ ; α] et strictement croissante sur [α ;+∞[(branches orientées vers le haut)

x	-∞		-1	0	n	$n+1$		+∞
$f(x)$		↘	4	↗	u_n	u_{n+1}	↗	

f est strictement décroissante sur]-∞ ; -1] et strictement croissante sur [-1 ;+∞[

b)Déterminer la monotonie de la suite (u_n)

comme f est croissante sur [0 ;+∞[alors la suite (u_n) est croissante

2.Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + n^2$
a) pour tout entier naturel n , exprimer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de n.

a) pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = u_n + n^2 - u_n = n^2$

b)En déduire la monotonie de la suite (u_n)

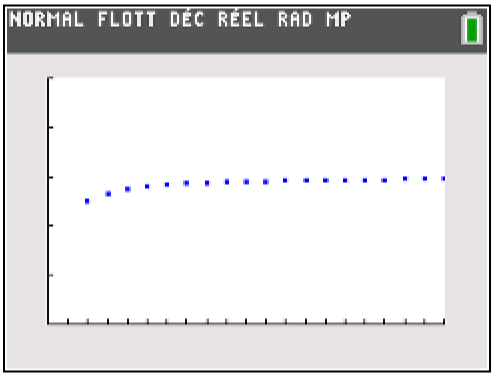
pour tout entier naturel n , $n^2 \geq 0$. Ainsi pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n \geq 0$
La suite (u_n) est donc croissante

3.Approche de la notion de limite

a)Limite finie

Soit la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n non nul , par $u_n = \frac{3n-1}{n}$.
On construit le tableau de valeurs avec des termes de la suite :

n	1	2	3	4	5	10	15	50	500
u_n	3	2,5	$\frac{8}{3} \approx 2{,}67$	2,75	2,8	2,9	$\approx 2{,}93$	2,98	2,998



Plus n devient grand, plus u_n semble se rapprocher de 3

Vocabulaire (première) : on dira que la suite (u_n) a pour limite 3 lorsque n tend vers +∞ .

Vocabulaire (terminale) : on dira que la suite (u_n) converge vers 3 et on note : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$

Seuil :
On peut s'intéresser à l'écart entre le terme u_n et sa limite 3.
On peut calculer $|u_n - 3|$. Evidemment, plus n devient grand plus cet écart se rapproche de 0.
On peut alors chercher à partir de quel valeur de n notée n_0 l'écart sera inférieur à une valeur positive donnée a.
Cette valeur n_0 porte le nom de seuil.
Par exemple : donner le seuil à partir duquel $|u_n - 3| < 0{,}01$.
$|u_n - 3| < 0{,}01$ dès que n≥ 101 n_0 =101

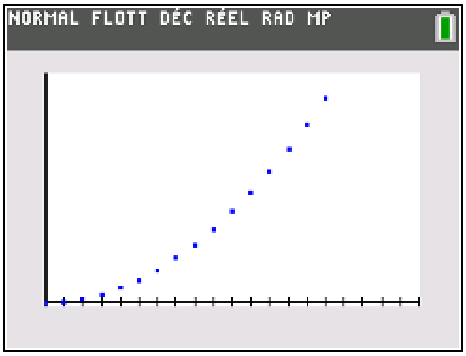
	A	B	C
1	n	u_n	$\vert u_n - 3\vert$
2	1	2	1
3	2	2,5	0,5
98	97	2,9897	0,01031
99	98	2,9898	0,0102
100	99	2,9899	0,0101
101	100	2,99	0,01
102	101	2,9901	0,0099
103	102	2,9902	0,0098
104	103	2,9903	0,00971

b)Limite infinie

Soit la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n , par $u_n = 2n^2 - 3$
On construit le tableau de valeurs avec des termes de la suite :

n	1	2	3	4	5	10	100	1000	10 000
u_n	-1	5	15	29	47	197	19997	1 999 997	199 999 997

Plus n devient grand, plus u_n semble prendre des valeurs de plus en plus grandes et semble même dépasser n'importe quel nombre réel A aussi grand soit il



Vocabulaire (première) : on dira que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Vocabulaire (terminale) : on dira que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$. et on note : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Seuil :
On peut alors chercher à partir de quel valeur de n notée n_0
u_n sera supérieure à une valeur donnée A.
Cette valeur n_0 porte le nom de seuil.

Trouver par le calcul le seuil à partir duquel $u_n > 10\,000$

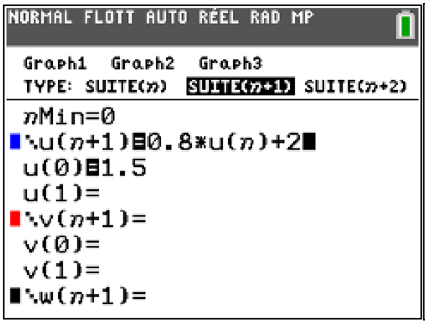
$2n^2 - 3 > 10\,000$ équivaut à $2n^2 > 10\,003$
équivaut à $n^2 > 10\,003/2$ (5001,5)
équivaut à $n > \sqrt{5001{,}5}$ $\sqrt{5001{,}5} \approx 70{,}72$
équivaut à $n \geq 71$ $n_0 = 71$

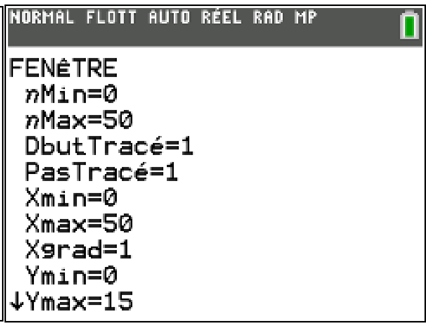
La fonction Python ci-dessous renvoie le seuil associé à un nombre A . Compléter cette fonction.

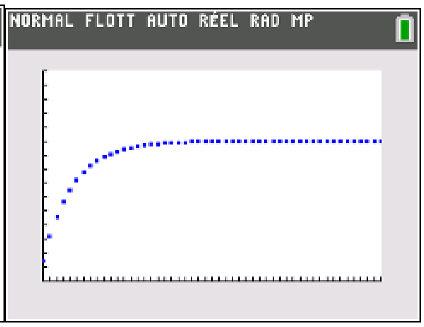
```python
def seuil(A):
    n=0
    u=-3
    while u<A:
        n=n+1
        u=2*n*n-3
    return(n)
```

```
*** Python 3.4.5 |Continuum Analytics, Inc.|
(default, Jul  5 2016, 14:56:50) [MSC v.1600 32
 bit (Intel)] on win32. ***
*** Remote le moteur Python  est actif ***
>>>
*** Console de processus distant Réinitialisée *
**
>>>
>>> seuil(10000)
71
>>> |
```

Exercice : la suite (u_n) est définie, pour tout entier naturel n , par $u_{n+1} = 0{,}8 \times u_n + 2$ et $u_0 = 1{,}5$
1.Représenter sur votre calculatrice le tableau de valeurs ainsi que le nuage de points (prendre comme fenetre graphique nmin=0 nmax=50 xmin = 0 xmax = 50 ymin=0 ymax=15.
2.Conjecturer la monotonie et la limite de cette suite.

1.






2. La suite (u_n) semble croissante et semble avoir pour limite 10 lorsque n tend vers $+\infty$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 10$