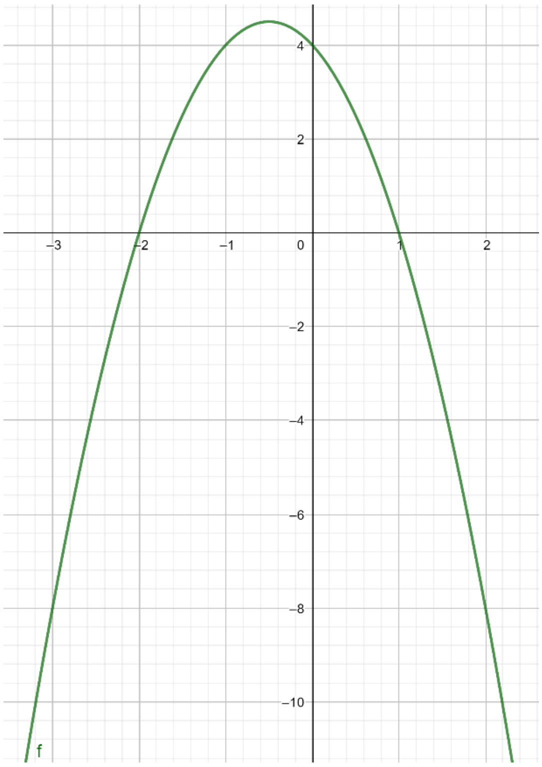
CHAPITRE 9– DERIVATION 3^ème^partie

Exercice d'introduction :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f\ (x) = -2x^2 - 2x + 4$dont on donne la courbe représentative C ci –contre :



1. Compléter le tableau de variation de$f$ suivant :

x	-∞ ... +∞
$f(x)$	

2. Donner la fonction dérivée de f '.

$$f\ (x) = -2x^2 - 2x + 4$$
$$f'(x) = \ ....$$

3. Compléter le tableau de signes de f '.

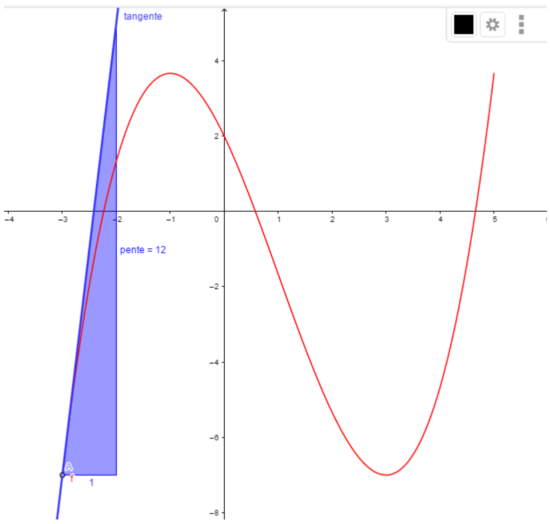
$\ldots \ldots \ldots . > 0$ si $\ldots \ldots \ldots .. > 0$ si $x \ldots \ldots \ldots ..$

x	-∞	...	+∞
$f'(x)$			

4. Que constatez-vous ?

Lorsque f est …………… sa dérivée f' est ………

Lorsque f est …………… sa dérivée f' est ………



Tentative de généralisation : mathssa.fr/montagnerusse

à partir de l'animation, on complète les tableaux ci-dessous

x	-3 5
$signe\ de\ f'(x)$	
$Variations\ de\ \ f(x)$	

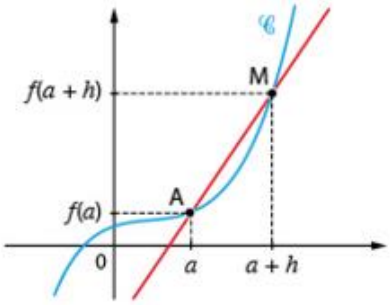
I – Dérivées et variations d'une fonction :

1.Théorème fondamental :

Théorème1:
Soit f une fonction **dérivable** sur un intervalle I
Si f est **croissante** sur I alors pour tout réel x de I, … … … … … . ..
Si f est **décroissante** sur I alors pour tout réel x de I, … … … … … . ..
Si f est **constante** sur I alors pour tout réel x de I, … … … … … ..

Preuve : graphique (uniquement si f est croissante sur I)

Dans la figure ci-contre, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative d'une fonction f croissante sur I. a et $a+h$ sont deux réels quelconques de l'intervalle I avec h, un réel strictement positif. On considère la droite passant par les points A(a ; $f(a)$) et M($a+h$; $f(a+h)$). Son coefficient directeur est égal à $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ que l'on va appeler $r(h)$.



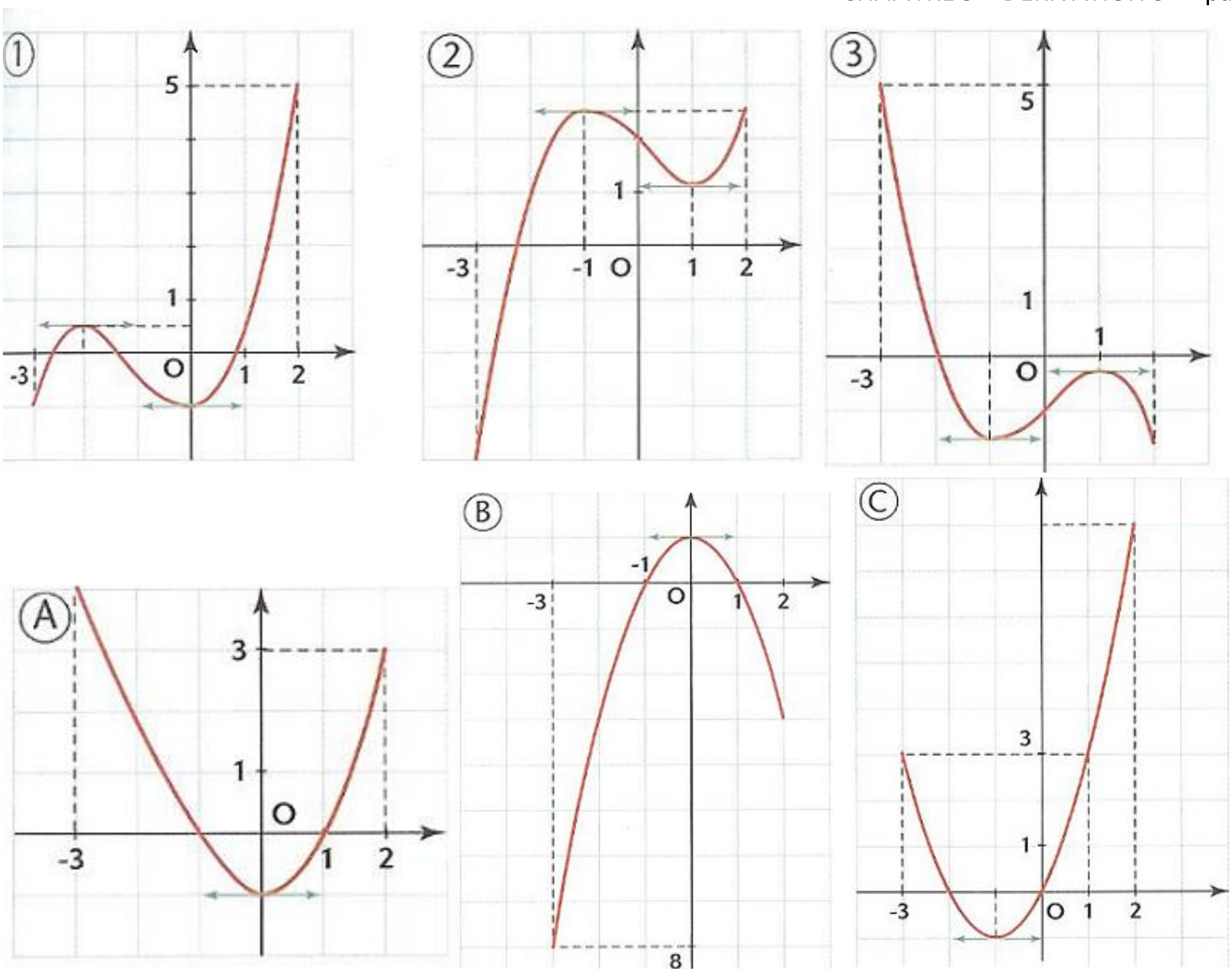
Lorsque f est croissante sur I, cette sécante (AM) a un coefficient directeur positif, et $r(h)$ reste positif lorsque le point M se rapproche aussi près que l'on veut du point A, c'est-à-dire lorsque h s'approche aussi près que l'on veut de 0.
De plus, lorsque h s'approche aussi près de 0 que l'on veut, on sait que $r(h)$ s'approche de $f'(a)$; on conjecture que, si f est croissante sur I, alors $f'(a)$ est positif pour tout réel a de I. On admet cette propriété.

Théorème2: réciproque
Soit f une fonction **dérivable** sur un intervalle I
Si pour tout réel x de I, $f'(x) \geq 0$ alors f est **………………….** sur I.
Si pour tout réel x de I , $f'(x) \leq 0$ alors f est **………………..** sur I.
Si pour tout réel x de I, $f'(x) = 0$ alors f est **………………** sur I.

Preuve : admis
Autrement dit : les variations d'une fonction f dépendent du signe de la dérivée.

2. Un exemple d'application : lecture graphique

Les courbes 1,2 et 3 représentent 3 fonctions f, g et h. Les courbes A ,B et C représentent leurs dérivées (pas nécessairement dans l'ordre)



Retrouver la courbe de chaque fonction dérivée.

x	-3 2
$f'(x)$	
$f(x)$	

On cherche la courbe d'une fonction :
*……………………………………
*…………………………………….
*……………….. Seule la courbe … répond à ces critères.

x	-3 2
$g'(x)$	
$g(x)$	

On cherche la courbe d'une fonction :
*……………………………………
*…………………………………….
*……………….. Seule la courbe … répond à ces critères.

3. Point méthode : étude des variations d'une fonction

Point méthode :
Pour étudier les **variations** d'une fonction f, on peut étudier le **……………………………………..**

Application : soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 4x + 2$.Etudier les variations de f.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction ………………...
Pour tout réel , $f'(x) =$ … .. ..
$a = 1$ $b = -3$ $c = -4$

$\Delta = \cdots$ … .. ..
Δ>0 .Le polynôme f' admet donc deux racines:

$x_1 = \cdots$ … .. ..
$x_2 = \cdots$ … .. ..

Le polynôme f est du signe de $a = 2$ … .. ..

x	-∞ +∞
$f'(x)$	
$f(x)$	

f est croissante sur … .. ..
f est décroissante sur …………………….. ;

4.Variations d'une fonction polynôme du second degré :

Théorème :
Soit f le **polynôme du second degré** définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Si …… alors f admet un minimum en ………….
Si …… alors f admet un maximum en …………..

Preuve :
f est dérivable sur $\mathbb{R}$en tant que fonction polynôme.
Pour tout réel x , $f'(x) = a \times 2x + b \times 1 + 0 = 2ax + b$
$2ax + b > 0$ équivaut à $2ax > -b$ équivaut à $x > -\frac{b}{2a}$ **cas où a>0**
$2ax + b > 0$ équivaut à $2ax > -b$ équivaut à $x < -\frac{b}{2a}$ **cas où a<0**

a>0

x	-∞		$-\frac{b}{2a}$		+∞
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		↘		↗	

a<0

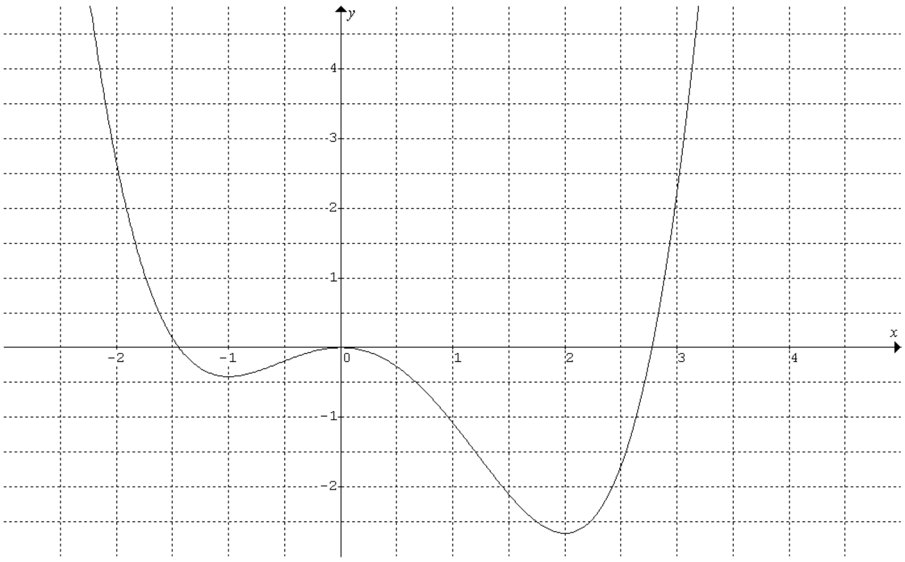
x	-∞		$-\frac{b}{2a}$		+∞
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗		↘	

II. Application aux extremums et extremums locaux:

1.Définition :

Définition :
f admet un extrémum local en a si il existe un ………………… contenant a , dans lequel f admet un ………………………. en a.

Exemple :



f admet un minimum local en ….. de valeur ………………..

f admet un minimum local en de valeur … de valeur ……………

f admet un maximum local en … de valeur ………………

Remarque : il peut arriver que les extremums locaux soient également des extremums.

Illustration f une fonction dérivable sur un intervalle I contenant le réel a .On suppose que f admet un extrémum local en a.

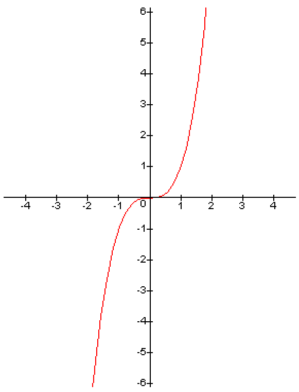
x	… $\quad a \quad$ …
$f'(x)$	- $\quad 0 \quad$ +
$f(x)$	$\searrow \quad \nearrow$

x	… $\quad a \quad$ …
$f'(x)$	+ $\quad 0 \quad$ -
$f(x)$	$\nearrow \quad \searrow$

2.Théorème :

Théorème :
si la **dérivée** d'une fonction ……………………………………. en a alors la fonction admet un extrémum local en a.

Remarque : l'observation du tableau nous permet de dire s'il y a un extrémum (ou extrémum local)
Si la dérivée s'annule en un réel a alors cela n'implique pas nécessairement que la fonction a un extrémum local en a.
Contre-exemple : $f(x) = \cdots.$ $f'(x) = \cdots \ldots \ldots$
$f'(x)$ …. et s'annule en … et pourtant il n'y a pas d'extremum local en 0.



Application :
On donne le tableau de variations d'une fonction f. Montrer que f admet un minimum. En déduire le signe de la fonction f.

x	*-5*		*2*		*4*
f(x)	*5*	↘	*1*	↗	*3*
f'(x)					

Comme … … … … … … … … … … … … … … … … …. alors f admet un minimum en 2 de valeur $f(2) = 1$.
Comme 1 est le minimum de la fonction f , alors en déduit que la fonction *f* est strictement positive.

3.Obtention d'inégalités

Dans les exercices , on rencontrera souvent les configurations suivantes :

x		*a*	
f	↗	$\boxed{0}$	↗
Signe de *f*	–	0	+

x		*a*	
f	↘	$\boxed{0}$	↘
Signe de *f*	+	0	-

x		*a*	
f	↗	**négatif**	↘
Signe de *f*		$\boxed{-}$	

x		*a*	
f	↘	**positif**	↗
Signe de *f*		$\boxed{+}$	