**CHAPITRE 9– DERIVATION 3èmepartie**

**Exercice d’introduction :**

On considère la fonction $f $définie sur $R$ par $f \left(x\right)= -2x^{2}– 2x + 4$dont on donne la courbe représentative C ci –contre :

**1.** Compléter le tableau de variation de$f $suivant :

|  |  |
| --- | --- |
| $$x$$ | *-∞ -0,5 +∞* |
| $$f(x)$$ |  |

**2.** Donner la fonction dérivée de $f ’$.

$$f (x) = -2x²– 2x + 4$$

$$f^{'}\left(x\right)= -4x-2$$

**3.** Compléter le tableau de signes de $f ’.$

$-4x-2>0$ si $-4x>2$ si $x<0,5$

|  |  |
| --- | --- |
| $$x$$ | *-∞ -0,5 +∞* |
| $$f’(x)$$ |  *+ 0* | *-* |

**4.** Que constatez-vous ?

Lorsque $f$ est croissante sa dérivée $f’ $est positive

Lorsque $f$ est croissante sa dérivée $f’$ est positive

**Tentative de généralisation :** [**mathssa.fr/montagnerusse**](http://www.mathssa.fr/montagnerusse)

 à partir de l’animation, on complète les tableaux ci-dessous

|  |  |
| --- | --- |
| $$x$$ | -3 -1 3 5 |
| $$signe de f’(x)$$ |  + 0 - 0 + |
| $$Variations de f(x)$$ |  |

**I – Dérivées et variations d’une fonction :**

**1.Théorème fondamental :**

|  |
| --- |
| **Théorème1:**Soit $f$ une fonction **dérivable** sur un intervalle I Si $f$ est **croissante** sur I alors pour tout réel *x* de I, $f’(x)\geq 0.$Si $f$ est **décroissante** sur I alors pour tout réel *x* de I, $f’(x)\leq 0.$Si $f$ est **constante** sur I alors pour tout réel *x* de I, $f’\left(x\right)=0.$ |

**Preuve : graphique (uniquement si f est croissante sur I)**



|  |
| --- |
| **Théorème2: réciproque**Soit $f$ une fonction **dérivable** sur un intervalle I Si pour tout réel *x* de I, $f’\left(x\right)\geq 0 $alors$ f $est **croissante** sur I.Si pour tout réel *x* de I$ , f’(x)\leq 0$ alors$ f $est **décroissante** sur I.Si pour tout réel *x* de I, $f’\left(x\right)=0 $alors$ f$ est **constante** sur I. |

**Preuve : admis**

**Autrement dit :** les variations d’une fonction $f$dépendent du signe de la dérivée.

**2. Un exemple d’application : lecture graphique**

Les courbes 1,2 et 3 représentent 3 fonctions $f,g et h$. Les courbes A ,B et C représentent leurs dérivées (pas nécessairement dans l’ordre)



Retrouver la courbe de chaque fonction dérivée.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|

|  |  |
| --- | --- |
| $$x$$ | *-3 -2 0 2* |
| $$f’(x)$$ |  *+ 0 - 0 +* |
| $$f(x)$$ |  *-0,5 5* *-1 -1* |

On cherche la courbe d’une fonction :\*positive ou nulle sur [-3 ;-2] et [0 ;2]\*négative ou nulle sur [-2 ;0]\*qui s’annule en -2 et 0. Seule la courbe C répond à ces critères. |

|  |  |
| --- | --- |
| $$x$$ | *-3 -1 1 2* |
| $$g’(x)$$ |  + 0 - 0 + |
| $$g(x)$$ |  *2,5 2,5* *-4 -1* |

On cherche la courbe d’une fonction :\*positive ou nulle sur [-3 ;-1] et [1 ;2]\*négative ou nulle sur [-1 ;1]\*qui s’annule en -1 et 1. Seule la courbe A répond à ces critères. |

**3. Point méthode : étude des variations d’une fonction**

|  |
| --- |
| **Point méthode :** Pour étudier les **variations** d’une fonction $f$, on peut étudier le **signe** de la **dérivée** $f’$. |

**Application  :** soit $f$ la fonction définie sur $R$ par $f\left(x\right)=\frac{1}{3}x^{3}-\frac{3}{2}x²-4x+2$*.*Etudier les variations de $f.$

$f$ est dérivable sur $R$ en tant que fonction polynome.

Pour tout réel , $f^{'}\left(x\right)=\frac{1}{3}×3x^{2}-\frac{3}{2}×2x-4×1=x²-3x-4$

$$a=1 b=-3 c=-4$$

$∆ =b^{2}-4ac=(-3)²-4×1×\left(-4\right)=25 $

∆>0 .Le polynôme $f'$ admet donc deux racines:

$$x\_{1}=\frac{-b-\sqrt{Δ}}{2a}=\frac{-(-3)-\sqrt{25}}{2}=\frac{3-5}{2}=-1$$

$$x\_{2}=\frac{-b+\sqrt{Δ}}{2a}=\frac{-\left(-3\right)+\sqrt{25}}{2}=\frac{3+5}{2}=4$$

Le polynôme $f $est du signe de $a=2 $à l’extérieur des racines.

|  |  |
| --- | --- |
| $$x$$ | *-∞ - 1 4 +∞* |
| $$f’(x)$$ |  *+ 0 - 0 +* |
| $$f\left(x\right)$$ |  $\frac{25}{6}$$-\frac{50}{3}$ |

$f $est croissante sur ]-∞ ;-1] et [4 ;+∞[

$f $est décroissante sur [-1 ;4]

**4.Variations d’une fonction polynôme du second degré :**

|  |
| --- |
| **Théorème :**Soit $f $le **polynôme du second degré** définie par $f(x)=ax²+bx+c.$*Si* $a>0 $alors $f$ admet un minimum en *x=-*$\frac{b}{2a}$*Si* $a<0 $alors$ f$ admet unmaximumen *x=-*$\frac{b}{2a}$ |

**Preuve :**

f est dérivable sur $R$en tant que fonction polynôme.

Pour tout réel $x ,$ $f^{'}\left(x\right)=a×2x+b×1+0=2ax+b$

$2ax+b>0$ équivaut à $2ax>-b$ équivaut à $x>-\frac{b}{2a}$ **cas où** $a>0$

$2ax+b>0$ équivaut à $2ax>-b$ équivaut à $x<-\frac{b}{2a } $ **cas où** $a<0$

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| a>0

|  |  |
| --- | --- |
| $$x$$ | *-∞* $-\frac{b}{2a} +$*∞* |
| $$f’(x)$$ | * *0 +*
 |
| $$f(x)$$ |  |

 | a<0

|  |  |
| --- | --- |
| $$x$$ | *-∞* $-\frac{b}{2a} +$*∞* |
| $f’(x$*)* |  + 0 - |
| $$f(x)$$ |  |

 |

**II. Application aux extremums et extremums locaux:**

**1.Définition :**

|  |
| --- |
| **Définition :**f admet un extrémum local en $a$ si il existe un intervalle ouvert contenant *a* , dans lequel $f $admet un extremum en *a*. |

**Exemple :**



$f$ admet un minimum local en -1 de valeur $f(-1)≈-0,4$

$f$ admet un minimum local en de valeur 2 de valeur $f(2)≈-2,7$

$f $admet un maximum local en 0 de valeur $f(0)=0$

**Remarque :**il peut arriver que les extremums locaux soient également des extremums.

**Illustration**$f$ une fonction dérivable sur un intervalle I contenant le réel *a .*On suppose que $f $admet un extrémum local en a.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|

|  |  |
| --- | --- |
| $$x$$ | *… a …* |
| $$f’(x)$$ | * *0 +*
 |
| $$f(x)$$ |  |

 |

|  |  |
| --- | --- |
| $$x$$ | *… a …* |
| *f’(x)* |  + 0 - |
| *f(x)* |  |

 |

**2.Théorème :**

|  |
| --- |
| **Théorème :** si la **dérivée** d’une fonction **s’annule et change de signe** en *a* alors la fonction admet un extrémum local en $a$. |



**Remarque :** l’observation du tableau nous permet de dire s’il y a un extrémum (ou extrémum local)

Si la dérivée s’annule en un réel *a* alors cela n’implique pas nécessairement que la fonction a un extrémum local en *a*.

Contre-exemple : $f(x)=x^{3}$ $f'(x)=3x²$

 $f’(x)\geq 0$ et s’annule en 0 et pourtant il n’y a pas d’extremum local en 0.

**Application :**

On donne le tableau de variations d’une fonction $f$. Montrer que $f$ admet un minimum. En déduire le signe de la fonction $f$.

|  |  |
| --- | --- |
| *x* | *-5 2 4* |
| *f(x)* | *5 3* *1* |
| *f’(x)* | * *0 +*
 |

Comme $f’ $**s’annule et change de signe** en 2 alors $f$ admet un minimum en 2 de valeur $f(2)=1$.

Comme 1 est le minimum de la fonction $f$ , alors en déduit que la fonction $f$ est strictement positive.

**3.Obtention d’inégalités**

**Dans les exercices , on rencontrera souvent les configurations suivantes :**



+ 0 -

0

0



+

-