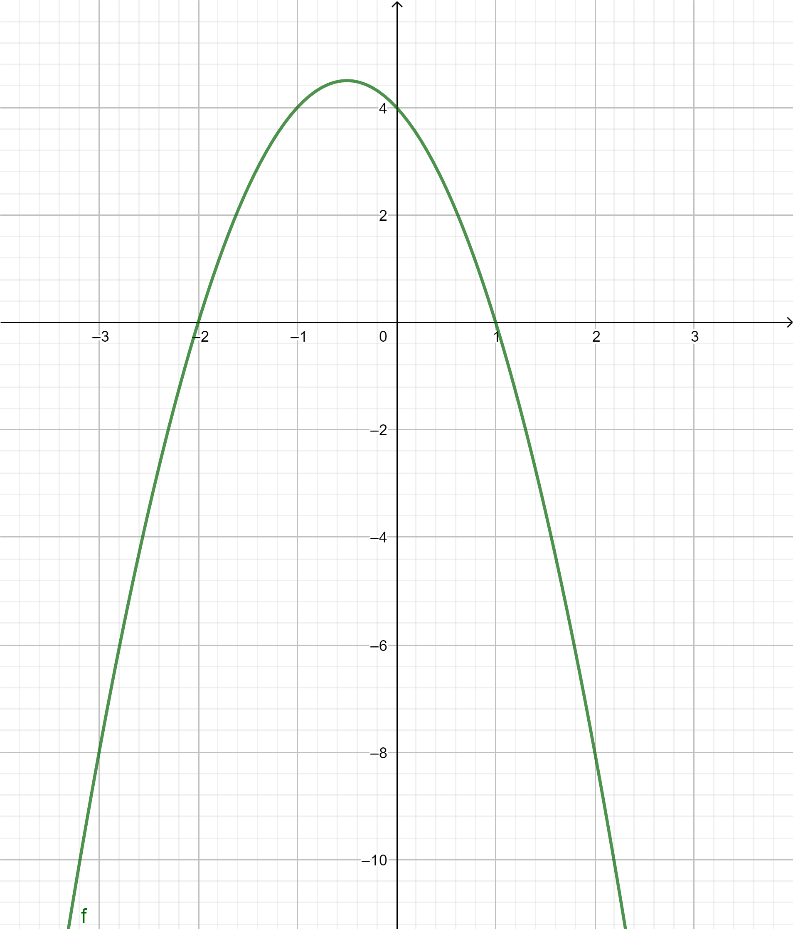
**CHAPITRE 9– DERIVATION 3èmepartie**

**Exercice d’introduction :**

On considère la fonction définie sur par dont on donne la courbe représentative C ci –contre :

**1.** Compléter le tableau de variation desuivant :

|  |  |
| --- | --- |
|  | *-∞ -0,5 +∞* |
|  |  |

**2.** Donner la fonction dérivée de .

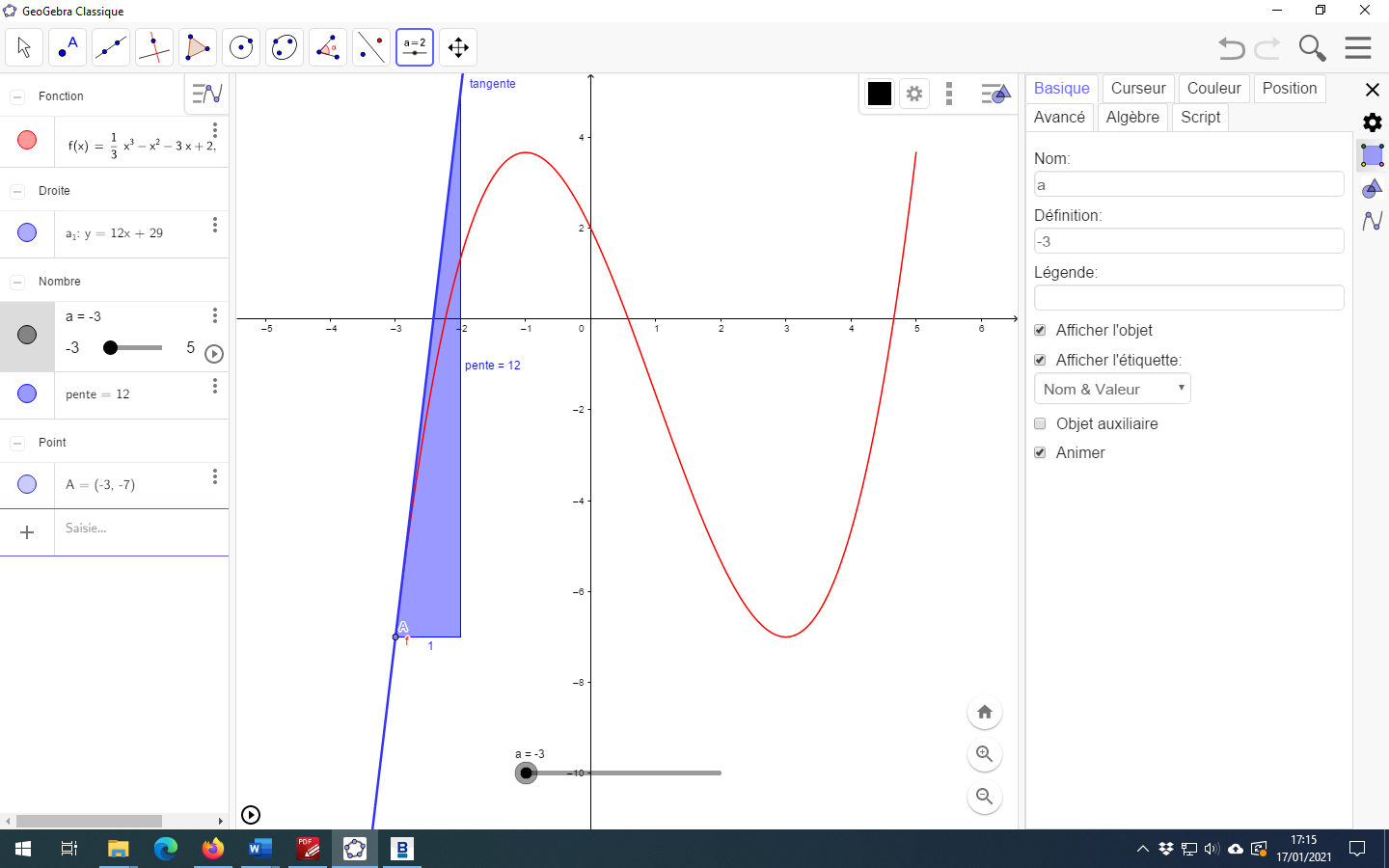
**3.** Compléter le tableau de signes de

si si

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | *-∞ -0,5 +∞* | |
|  | *+ 0* | *-* |

**4.** Que constatez-vous ?

Lorsque est croissante sa dérivée est positive

Lorsque est croissante sa dérivée est positive

**Tentative de généralisation :** [**mathssa.fr/montagnerusse**](http://www.mathssa.fr/montagnerusse)

à partir de l’animation, on complète les tableaux ci-dessous

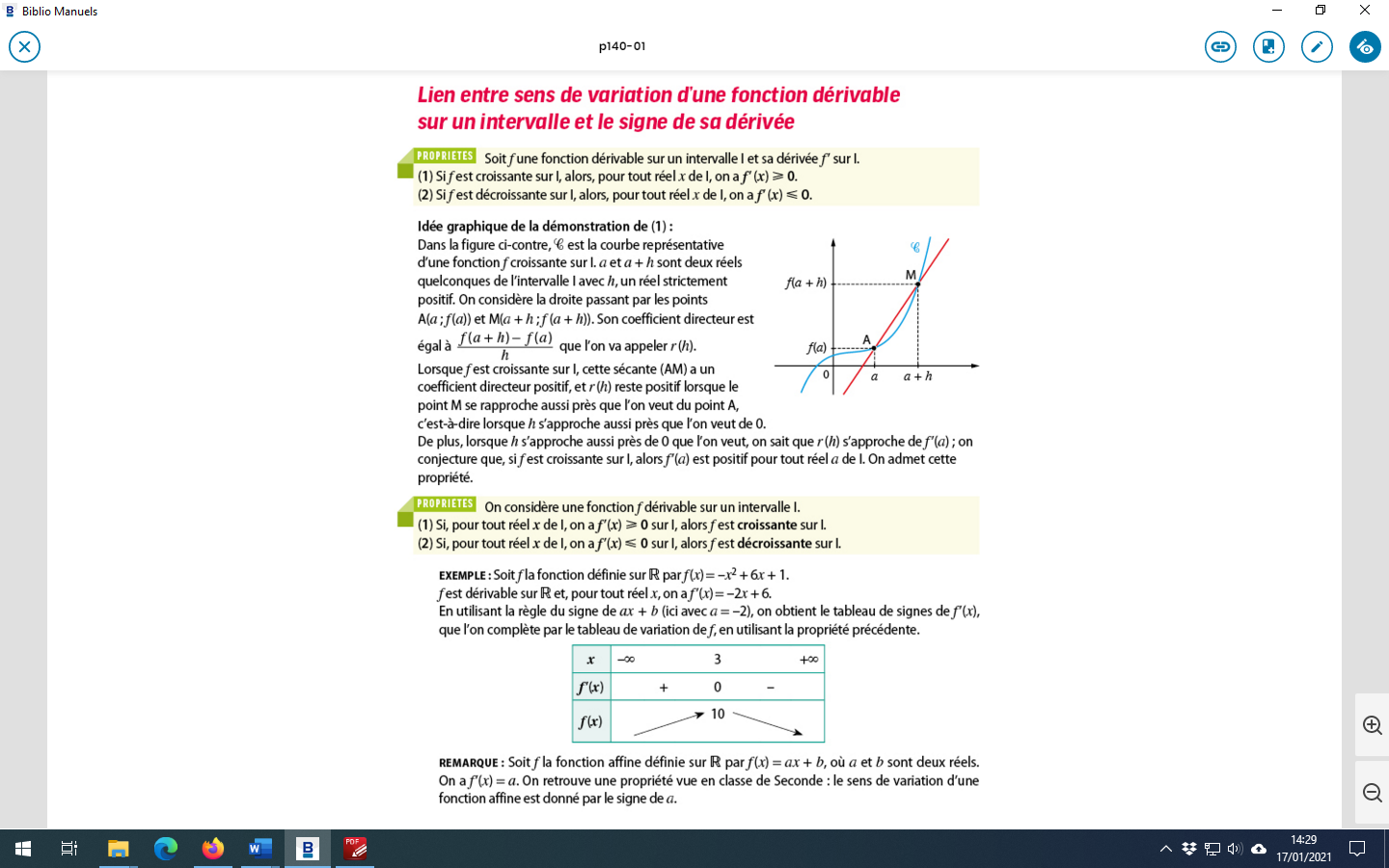
|  |  |
| --- | --- |
|  | -3 -1 3 5 |
|  | + 0 - 0 + |
|  |  |

**I – Dérivées et variations d’une fonction :**

**1.Théorème fondamental :**

|  |
| --- |
| **Théorème1:**  Soit une fonction **dérivable** sur un intervalle I  Si est **croissante** sur I alors pour tout réel *x* de I,  Si est **décroissante** sur I alors pour tout réel *x* de I,  Si est **constante** sur I alors pour tout réel *x* de I, |

**Preuve : graphique (uniquement si f est croissante sur I)**



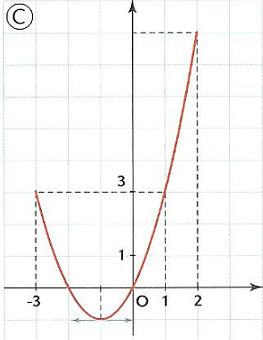
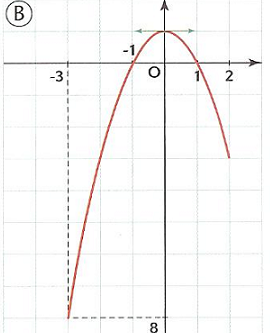
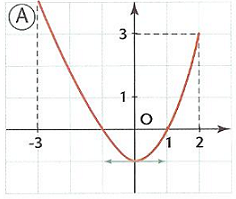
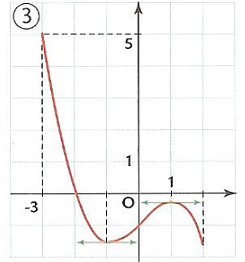
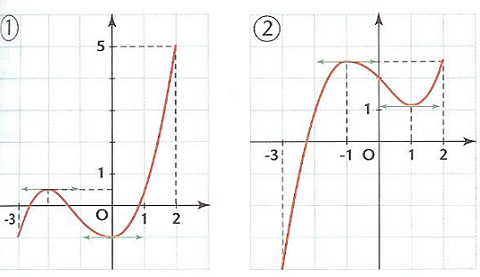
|  |
| --- |
| **Théorème2: réciproque**  Soit une fonction **dérivable** sur un intervalle I  Si pour tout réel *x* de I, alorsest **croissante** sur I.  Si pour tout réel *x* de I alorsest **décroissante** sur I.  Si pour tout réel *x* de I, alors est **constante** sur I. |

**Preuve : admis**

**Autrement dit :** les variations d’une fonction dépendent du signe de la dérivée.

**2. Un exemple d’application : lecture graphique**

Les courbes 1,2 et 3 représentent 3 fonctions . Les courbes A ,B et C représentent leurs dérivées (pas nécessairement dans l’ordre)



Retrouver la courbe de chaque fonction dérivée.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  | | --- | --- | |  | *-3 -2 0 2* | |  | *+ 0 - 0 +* | |  | *-0,5 5*  *-1 -1* |   On cherche la courbe d’une fonction :  \*positive ou nulle sur [-3 ;-2] et [0 ;2]  \*négative ou nulle sur [-2 ;0]  \*qui s’annule en -2 et 0. Seule la courbe C répond à ces critères. | |  |  | | --- | --- | |  | *-3 -1 1 2* | |  | + 0 - 0 + | |  | *2,5 2,5*  *-4 -1* |   On cherche la courbe d’une fonction :  \*positive ou nulle sur [-3 ;-1] et [1 ;2]  \*négative ou nulle sur [-1 ;1]  \*qui s’annule en -1 et 1. Seule la courbe A répond à ces critères. |

**3. Point méthode : étude des variations d’une fonction**

|  |
| --- |
| **Point méthode :**  Pour étudier les **variations** d’une fonction , on peut étudier le **signe** de la **dérivée** . |

**Application  :** soit la fonction définie sur par *.*Etudier les variations de

est dérivable sur en tant que fonction polynome.

Pour tout réel ,

∆>0 .Le polynôme admet donc deux racines:

Le polynôme est du signe de à l’extérieur des racines.

|  |  |
| --- | --- |
|  | *-∞ - 1 4 +∞* |
|  | *+ 0 - 0 +* |
|  |  |

est croissante sur ]-∞ ;-1] et [4 ;+∞[

est décroissante sur [-1 ;4]

**4.Variations d’une fonction polynôme du second degré :**

|  |
| --- |
| **Théorème :**  Soit le **polynôme du second degré** définie par  *Si* alors admet un minimum en *x=-*  *Si* alors admet unmaximumen *x=-* |

**Preuve :**

f est dérivable sur en tant que fonction polynôme.

Pour tout réel

équivaut à équivaut à **cas où**

équivaut à équivaut à  **cas où**

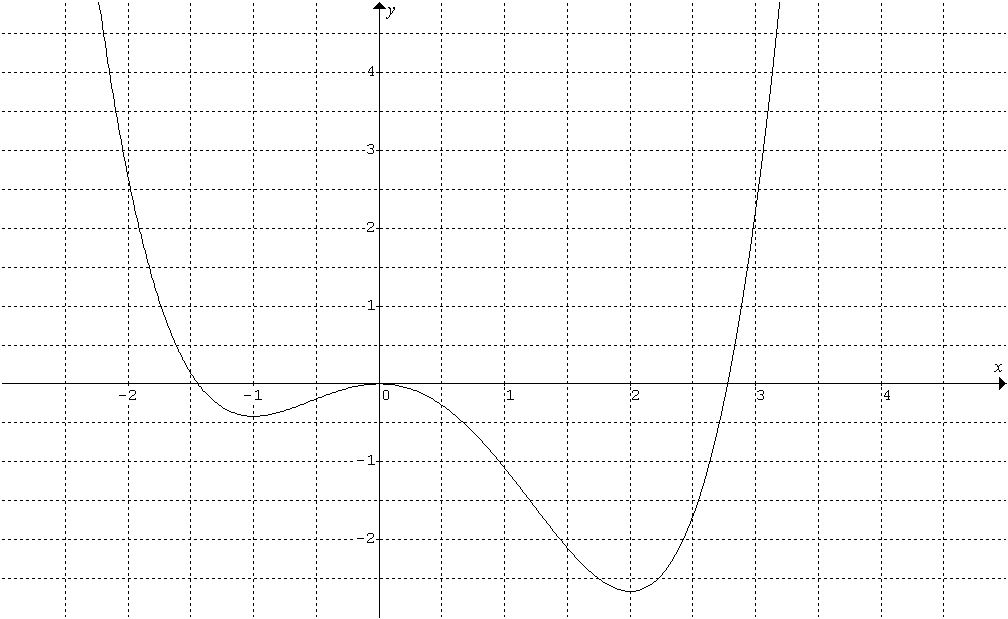
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| a>0   |  |  | | --- | --- | |  | *-∞ ∞* | |  | * *0 +* | |  |  | | a<0   |  |  | | --- | --- | |  | *-∞ ∞* | | *)* | + 0 - | |  |  | |

**II. Application aux extremums et extremums locaux:**

**1.Définition :**

|  |
| --- |
| **Définition :**  f admet un extrémum local en si il existe un intervalle ouvert contenant *a* , dans lequel admet un extremum en *a*. |

**Exemple :**



admet un minimum local en -1 de valeur

admet un minimum local en de valeur 2 de valeur

admet un maximum local en 0 de valeur

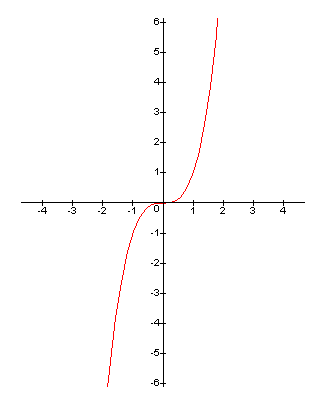
**Remarque :**il peut arriver que les extremums locaux soient également des extremums.

**Illustration** une fonction dérivable sur un intervalle I contenant le réel *a .*On suppose que admet un extrémum local en a.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  | | --- | --- | |  | *… a …* | |  | * *0 +* | |  |  | | |  |  | | --- | --- | |  | *… a …* | | *f’(x)* | + 0 - | | *f(x)* |  | |

**2.Théorème :**

|  |
| --- |
| **Théorème :**  si la **dérivée** d’une fonction **s’annule et change de signe** en *a* alors la fonction admet un extrémum local en . |



**Remarque :** l’observation du tableau nous permet de dire s’il y a un extrémum (ou extrémum local)

Si la dérivée s’annule en un réel *a* alors cela n’implique pas nécessairement que la fonction a un extrémum local en *a*.

Contre-exemple :

et s’annule en 0 et pourtant il n’y a pas d’extremum local en 0.

**Application :**

On donne le tableau de variations d’une fonction . Montrer que admet un minimum. En déduire le signe de la fonction .

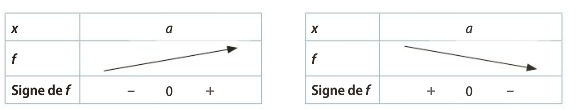
|  |  |
| --- | --- |
| *x* | *-5 2 4* |
| *f(x)* | *5 3*  *1* |
| *f’(x)* | * *0 +* |

Comme **s’annule et change de signe** en 2 alors admet un minimum en 2 de valeur .

Comme 1 est le minimum de la fonction , alors en déduit que la fonction est strictement positive.

**3.Obtention d’inégalités**

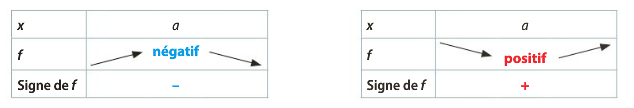
**Dans les exercices , on rencontrera souvent les configurations suivantes :**



+ 0 -

0

0



+

-