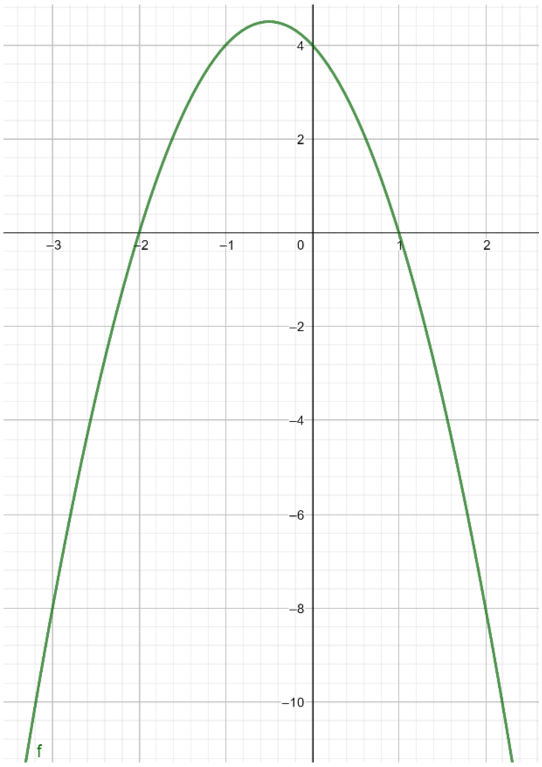
CHAPITRE 9– DERIVATION 3èmepartie

Exercice d'introduction :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f\ (x)\ =\ -2x^2 -\ 2x\ +\ 4$dont on donne la courbe représentative C ci –contre :



1. Compléter le tableau de variation de$f$ suivant :

x	-∞		-0,5		+∞
$f(x)$		↗		↘	

2. Donner la fonction dérivée de f '.

$$f\ (x)\ =\ -2x^2 -\ 2x\ +\ 4$$
$$f'(x) =\ -4x - 2$$

3. Compléter le tableau de signes de f '.

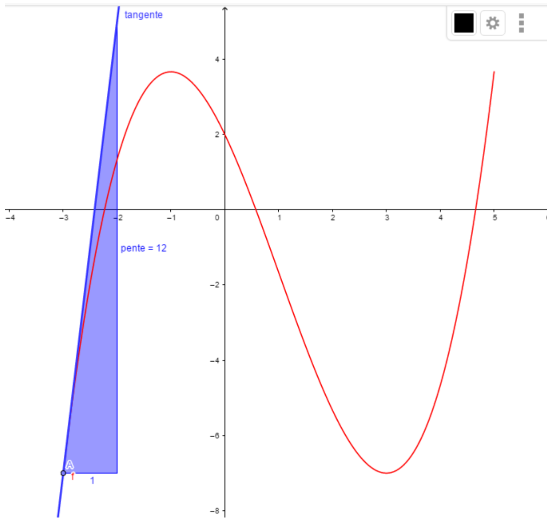
$-4x - 2 > 0$ si $-4x > 2$ si $x < 0,5$

x	-∞		-0,5		+∞
$f'(x)$		+	0	-	

4. Que constatez-vous ?

Lorsque f est croissante sa dérivée f' est positive

Lorsque f est croissante sa dérivée f' est positive



<u>Tentative de généralisation :</u> mathssa.fr/montagnerusse

à partir de l'animation, on complète les tableaux ci-dessous

x	-3		-1		3		5
$signe\ de\ f'(x)$		+	0	-	0	+	
$Variations\ de\ \ f(x)$		↗		↘		↗	

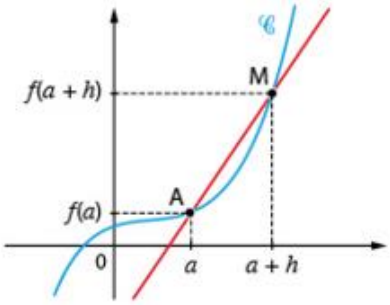
I – Dérivées et variations d'une fonction :

1.Théorème fondamental :

Théorème1:
Soit f une fonction **dérivable** sur un intervalle I
Si f est **croissante** sur I alors pour tout réel x de I, $f'(x) \geq 0$.
Si f est **décroissante** sur I alors pour tout réel x de I, $f'(x) \leq 0$.
Si f est **constante** sur I alors pour tout réel x de I, $f'(x) = 0$.

Preuve : graphique (uniquement si f est croissante sur I)

Dans la figure ci-contre, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative d'une fonction f croissante sur I. a et $a+h$ sont deux réels quelconques de l'intervalle I avec h, un réel strictement positif. On considère la droite passant par les points A(a ; $f(a)$) et M($a+h$; $f(a+h)$). Son coefficient directeur est égal à $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ que l'on va appeler $r(h)$.

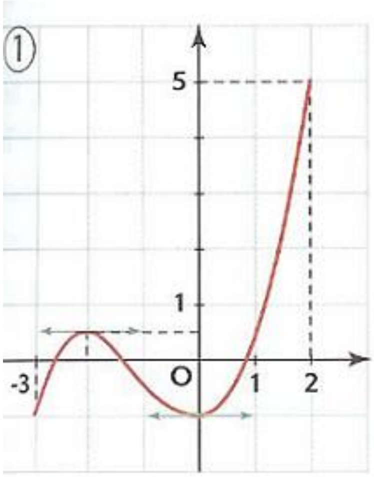


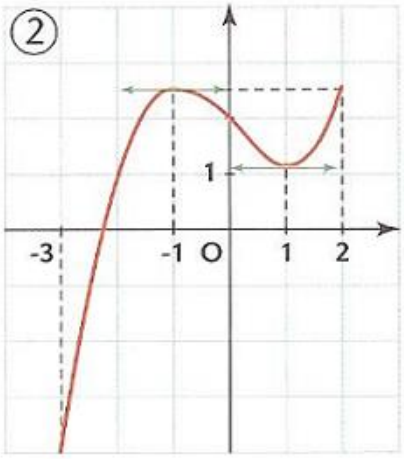
Lorsque f est croissante sur I, cette sécante (AM) a un coefficient directeur positif, et $r(h)$ reste positif lorsque le point M se rapproche aussi près que l'on veut du point A, c'est-à-dire lorsque h s'approche aussi près que l'on veut de 0.
De plus, lorsque h s'approche aussi près de 0 que l'on veut, on sait que $r(h)$ s'approche de $f'(a)$; on conjecture que, si f est croissante sur I, alors $f'(a)$ est positif pour tout réel a de I. On admet cette propriété.

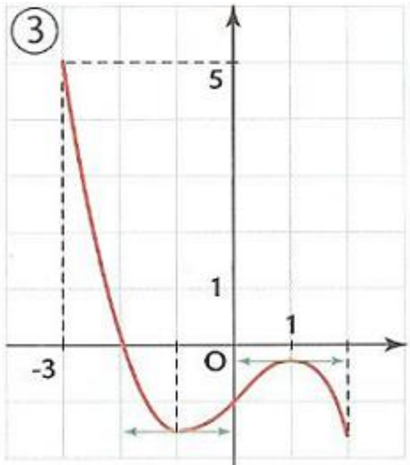
Théorème2: réciproque
Soit f une fonction **dérivable** sur un intervalle I
Si pour tout réel x de I, $f'(x) \geq 0$ alors f est **croissante** sur I.
Si pour tout réel x de I , $f'(x) \leq 0$ alors f est **décroissante** sur I.
Si pour tout réel x de I, $f'(x) = 0$ alors f est **constante** sur I.

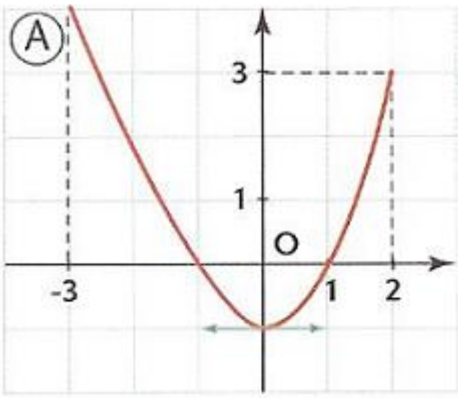
Preuve : admis
Autrement dit : les variations d'une fonction f dépendent du signe de la dérivée.

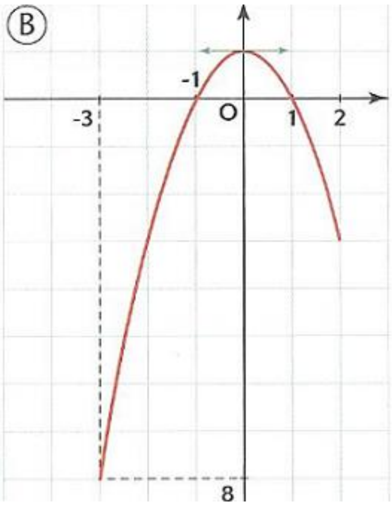
2. Un exemple d'application : lecture graphique
Les courbes 1,2 et 3 représentent 3 fonctions f, g et h. Les courbes A ,B et C représentent leurs dérivées (pas nécessairement dans l'ordre)

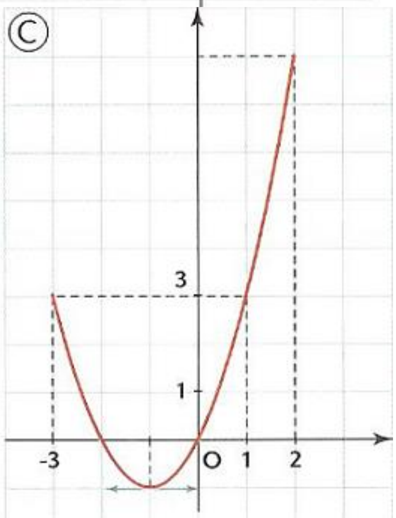












Retrouver la courbe de chaque fonction dérivée.

x	-3		-2		0		2
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	-1	↗	$0,5$	↘	-1	↗	5

x	-3		-1		1		2
$g'(x)$		+	0	-	0	+	
$g(x)$	-4	↗	$2,5$	↘	-1	↗	$2,5$

On cherche la courbe d'une fonction :
*positive ou nulle sur [-3 ;-2] et [0 ;2]
*négative ou nulle sur [-2 ;0]
*qui s'annule en -2 et 0. Seule la courbe C répond à ces critères.

On cherche la courbe d'une fonction :
*positive ou nulle sur [-3 ;-1] et [1 ;2]
*négative ou nulle sur [-1 ;1]
*qui s'annule en -1 et 1. Seule la courbe A répond à ces critères.

3. Point méthode : étude des variations d'une fonction

Point méthode :
Pour étudier les **variations** d'une fonction f, on peut étudier le **signe** de la **dérivée** $\boldsymbol{f'}$.

<u>Application :</u> soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 4x + 2$.Etudier les variations de f.

f est dérivable sur ℝ en tant que fonction polynome.

Pour tout réel , $f'(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2 - \frac{3}{2} \times 2x - 4 \times 1 = x^2 - 3x - 4$

$a = 1 \qquad b = -3 \qquad c = -4$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 25$

Δ>0 .Le polynôme f' admet donc deux racines:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) - \sqrt{25}}{2} = \frac{3-5}{2} = -1$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) + \sqrt{25}}{2} = \frac{3+5}{2} = 4$$

Le polynôme f est du signe de $a = 2$ à l'extérieur des racines.

x	-∞		- 1		4		+∞
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{25}{6}$	$\searrow$	$\frac{50}{3}$	$\nearrow$	

f est croissante sur]-∞ ;-1] et [4 ;+∞[

f est décroissante sur [-1 ;4]

<u>4.Variations d'une fonction polynôme du second degré :</u>

> **<u>Théorème :</u>**
> Soit f le **polynôme du second degré** définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$.
> *Si* $a > 0$ alors f admet un minimum en x=-$\frac{b}{2a}$
> *Si* $a < 0$ alors f admet un maximum en x=-$\frac{b}{2a}$

<u>Preuve :</u>

f est dérivable sur ℝen tant que fonction polynôme.

Pour tout réel x , $f'(x) = a \times 2x + b \times 1 + 0 = 2ax + b$

$2ax + b > 0$ équivaut à $2ax > -b$ équivaut à $x > -\frac{b}{2a}$ **<u>cas où $a > 0$</u>**

$2ax + b > 0$ équivaut à $2ax > -b$ équivaut à $x < -\frac{b}{2a}$ **<u>cas où $a < 0$</u>**

a>0

x	-∞		$-\frac{b}{2a}$		+∞
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

a<0

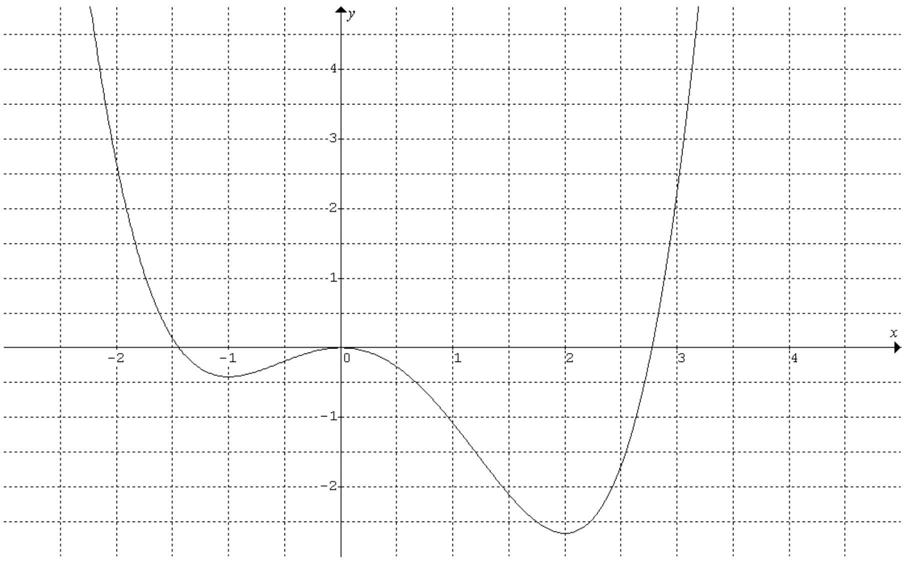
x	-∞		$-\frac{b}{2a}$		+∞
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

<u>II. Application aux extremums et extremums locaux:</u>

<u>1.Définition :</u>

<u>Définition :</u>
f admet un extrémum local en a si il existe un intervalle ouvert contenant a , dans lequel f admet un extremum en a.

<u>Exemple :</u>



f admet un minimum local en -1 de valeur $f(-1) \approx -0{,}4$

f admet un minimum local en de valeur 2 de valeur $f(2) \approx -2{,}7$

f admet un maximum local en 0 de valeur $f(0) = 0$

<u>Remarque :</u>il peut arriver que les extremums locaux soient également des extremums.

<u>Illustration</u>f une fonction dérivable sur un intervalle I contenant le réel a .On suppose que f admet un extrémum local en a.

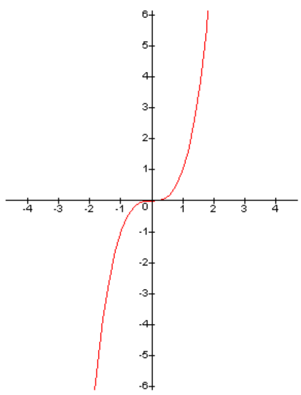
x	…	a	…
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘		↗

x	…	a	…
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗		↘

<u>2.Théorème :</u>

<u>Théorème :</u>
si la **dérivée** d'une fonction **s'annule et change de signe** en a alors la fonction admet un extrémum local en a.

<u>Remarque :</u> l'observation du tableau nous permet de dire s'il y a un extrémum (ou extrémum local)
Si la dérivée s'annule en un réel a alors cela n'implique pas nécessairement que la fonction a un extrémum local en a.
Contre-exemple : $f(x) = x^3$ $f'(x) = 3x^2$
$f'(x) \geq 0$ et s'annule en 0 et pourtant il n'y a pas d'extremum local en 0.



Application :

On donne le tableau de variations d'une fonction f. Montrer que f admet un minimum. En déduire le signe de la fonction f.

x	*-5*		*2*		*4*
f(x)	*5*	↘	*1*	↗	*3*
f'(x)		-	*0*	+	

Comme f' **s'annule et change de signe** en 2 alors f admet un minimum en 2 de valeur $f(2) = 1$.
Comme 1 est le minimum de la fonction f , alors en déduit que la fonction f est strictement positive.

3.Obtention d'inégalités

Dans les exercices , on rencontrera souvent les configurations suivantes :

x			*a*		
f		↗	$\boxed{0}$	↗	
Signe de *f*		−	0	+	

x			*a*		
f		↘	$\boxed{0}$	↘	
Signe de *f*		+	0	-	

x		*a*	
f	↗	**négatif**	↘
Signe de *f*		$\boxed{-}$	

x		*a*	
f	↘	**positif**	↗
Signe de *f*		$\boxed{+}$	