Devoir à la maison numéro 13
Pour le 30/04/24

Exercice 1 :
Les résultats seront arrondis au millième si nécessaire.

En France, la consommation de produits bio croît depuis plusieurs années.
En 2017, le pays comptait 52 % de femmes. Cette même année, 92 % des Français avaient déjà consommé des produits bio. De plus, parmi les consommateurs de produits bio, 55 % étaient des femmes.
On choisit au hasard une personne dans le fichier des Français de 2017. On note :

- F l'évènement « la personne choisie est une femme » ;
- H l'évènement « la personne choisie est un homme » ;
- B l'évènement « la personne choisie a déjà consommé des produits bio ».

(on pourra faire deux arbres pondérés)

1. Traduire les données numériques de l'énoncé à l'aide des évènements F et B.
2. a. Montrer que $P(F \cap B) = 0,506$.
   b. En déduire la probabilité qu'une personne ait consommé des produits bio en 2017, sachant que c'est une femme.

3.Calculer $P(\overline{B} \cap H)$ à l'aide de la formule des probabilités totales puis en déduire $P_H(\overline{B})$.

Exercice 2:
1.On considère la fonction *f* définie sur l'intervalle $[0,5\ ;\ 8]$ par $f(x) = (20x - 20)e^{-0,5x}$.
a) Démontrer que $f'(x) = (-10x + 30)e^{-0,5x}$
b) Etudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de *f* sur l'intervalle $[0,5\ ;\ 8]$.

2. Une entreprise produit des bicyclettes, la production mensuelle variant de 50 à 800 bicyclettes. Le bénéfice mensuel réalisé par cette production peut être modélisé par la fonction *f* précédente de la façon suivante : si, un mois donné, on produit *x* centaines de bicyclettes, alors $f(x)$ modélise le bénéfice (exprimé en milliers d'euros) réalisé par l'entreprise ce même mois.
a. Combien, pour un mois donné, l'entreprise doit-elle produire au minimum de bicyclettes pour ne pas travailler à perte ? Justifier.
b. Combien, pour un mois donné, l'entreprise doit-elle produire de bicyclettes pour réaliser un bénéfice maximal. Préciser alors ce bénéfice à un euro près.

Exercice 3:

Soit f la fonction définie sur $[-1\ ;\ 1]$ par $f(x) = \dfrac{1}{e^x + e^{-x}}$.

Justifier le tableau de variation de f donné ci-dessous.

x	-1		0		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\dfrac{e}{e^2+1}$	$\nearrow$	$0,5$	$\searrow$	$\dfrac{e}{e^2+1}$

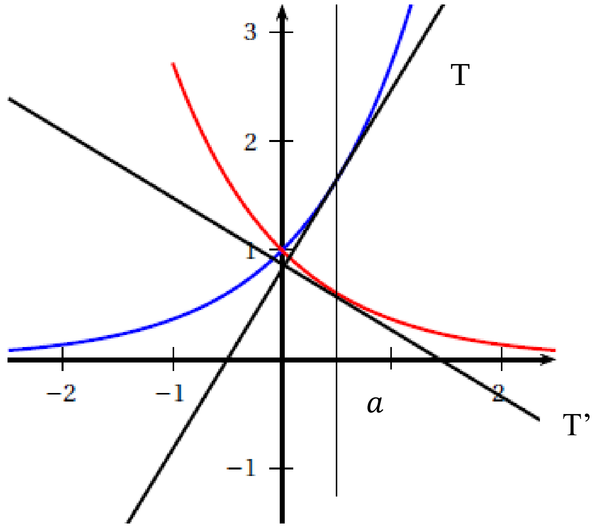
Exercice 4 :

Soient f et g les fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$ et $g(x) = e^{-x}$.

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f et $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé du plan.

Pour tout réel a, on note M le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a et N le point de $\mathscr{C}_g$ d'abscisse a.

La tangente T en M à $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en P , la tangente T' en N à $\mathscr{C}_g$ coupe l'axe des abscisses en Q.
A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, on a représenté la situation pour différentes valeurs de a et on a relevé dans un tableur la longueur du segment [PQ] pour chacune des valeurs de a.



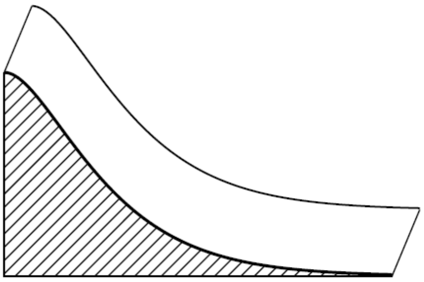
	A	B
1	Abscisse a	Longueur PQ
2	−3	2
3	−2,5	2
4	−2	2
5	−1,5	2
6	−1	2
7	−0,5	2
8	0	2
9	0,5	2
10	1	2
11	1,5	2
12	2	2
13	2,5	2
14		

Les 2 questions sont indépendantes

1. a) Pour tout réel x, donner sans justifier $f'(x)$ et $g'(x)$.
b)Soit $\vec{u}(1; f'(a))$ et $\vec{v}(1; g'(a))$ deux vecteurs directeurs respectifs de la droite T et de la droite T'.
Démontrer que T et T' sont perpendiculaires (on utilisera le produit scalaire).
2.a) Que peut-on conjecturer pour la longueur PQ ?
b) Déterminer par le calcul l'abscisse de P puis l'abscisse de Q. Démontrer la conjecture de la question 2a).

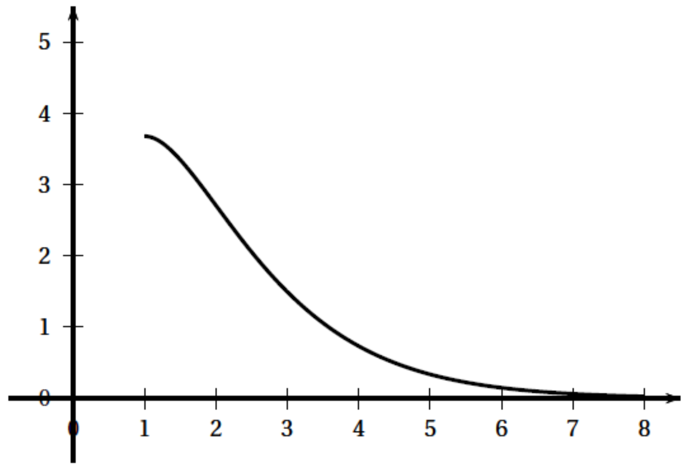
Exercice 5 :

Le directeur d'un zoo souhaite construire un toboggan pour les pandas. Il réalise le schéma suivant de ce toboggan en perspective cavalière.



Partie A-

Le profil de ce toboggan est modélisé par la courbe C représentant la fonction f définie sur l'intervalle [1 ;8] par $f(x) = (ax + b)e^{-x}$.
La fonction f est supposée dérivable sur [1 ;8].
La courbe C est tracée ci-dessous dans un repère orthonormé dont l'unité est le mètre.



1.Donner ,sans justifier, l'expression de $f'(x)$ en fonction de x.
2.On souhaite que la tangente à le courbe C au point d'abscisse 1 soit horizontale. Que vaut alors $f'(1)$? Déterminer la valeur de l'entier b.
3.On souhaite que la hauteur du toboggan soit située entre 3,5 et 4 mètres de haut c'est-à-dire $3{,}5 \leq f(1) \leq 4$. Déterminer la valeur de l'entier a.

Par la suite, on admettra que le profil du toboggan est modélisé par la courbe C représentant la fonction f définie sur [1 ;8] par $f(x) = 10xe^{-x}$. On admet également que $f'(x) = 10(1 - x)e^{-x}$

Partie B-

1. Prouver que pour tout réel x de [1 ;8], $f'(x) \leq 0$.

2.La pente en un point d'abscisse x est donnée par la formule $p(x) = |f'(x)|$.
D'après la question précédente, $p(x) = -f'(x) = 10(x - 1)\, e^{-x}$.
On admet que p est dérivable sur [1 ;8]. Donner sans justifier l'expression de $p'(x)$ en fonction de x.
3.Etudier les variations de la fonction p. En déduire la pente maximale p_{max} de ce toboggan. A quelle valeur en degré correspond cette pente maximale (résoudre l'équation tan(α)= p_{max})
4. Ce toboggan est homologué sous réserve que la pente maximale ne dépasse pas 55 degrés. A votre avis , le toboggan sera-t-il homologué?

Exercice 6 : facultatif – classe prépa

Soit n un entier naturel.
Le but de l'exercice est de déterminer une expression de $S_n = \sum_{k=0}^{n} k^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$

1.Pour tout entier naturel k vérifiant $0 \leq k \leq n$, exprimer $(k + 1)^3 - k^3$ en fonction des puissances de k.

2.Ecrire l'expression de $(k + 1)^3 - k^3$ pour $k = 0$, $k = 1$, $k = n - 1$ puis $k = n$ (écrire les égalités les unes en dessous des autres , laisser des pointillés entre les 2 premières lignes et les 2 dernières)

3.En ajoutant les égalités membre à membre, démontrer que $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.