

Devoir à la maison numéro 14
Pour le 21/05/24

Exercice 1 : suite arithmétique – géométrique et sommation

Les trois questions sont indépendantes.

1. Soit (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = -2$ de raison $r = 3$.

a) Pour tout entier n , exprimer u_n en fonction de n .

b) Calculer u_{11} .

c) En déduire $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{11}$.

2. Soit (u_n) est une suite arithmétique de raison r telle que $u_{50} = 406$ et $u_{100} = 806$

a) Calculer la raison r et u_0 .

b) Calculer $S = u_{10} + u_{11} + \dots + u_{30}$.

3. Soit (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ de raison $q = 3$.

a) Pour tout entier n , exprimer u_n en fonction de n .

b) Calculer $S = u_5 + \dots + u_{11}$

Exercice 2 : suite arithmétique - contextualisation

Pierre se constitue une tirelire afin d'acheter un vélo qui coûte 200 €.

Après un dépôt initial dans cette tirelire de 18 euros, il décide qu'à la fin de chaque mois, il déposera une somme de plus en plus grande : la somme déposée augmentera de 2 euros par rapport à celle du mois précédent.

On note $p_0 = 18$ le dépôt initial et p_n la somme déposée à la fin du n ème mois.

On obtient ainsi une suite (p_n) .

1. Donner sans justifier p_1 et p_2 .

2. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n .

3. En déduire la nature de la suite (p_n) ainsi que l'expression de p_n en fonction de n .

4. a) Quelle somme contiendra la tirelire au bout de deux mois ?

b) Démontrer que la somme totale contenue dans la tirelire au bout de n mois est

$$S_n = (n + 1)(n + 18).$$

5. Au bout de combien de mois, Pierre pourra-t-il casser sa tirelire et s'acheter son vélo. Justifier. *Toute prise d'initiative sera valorisée.*

Exercice 3 : suite géométrique - contextualisation

Une entreprise décide de verser à ses ingénieurs une prime annuelle de 600 euros.

Pour ne pas se dévaluer, il est prévu que chaque année la prime augmente de 3% par rapport à l'année précédente. On note u_n la prime obtenue la n ème année. Ainsi $u_1 = 600$.

1. Calculer u_2 .

2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .

3. En déduire la nature de la suite (u_n) ainsi que l'expression de u_n en fonction de n . (le 1^{er} terme est u_1)

4. Un ingénieur compte rester 20 ans dans cette entreprise à partir du moment où est versé la prime. On souhaite calculer la somme totale S des primes touchées sur les 20 années

$$(S = u_1 + u_2 + \dots + u_{20})$$

a) Le programme Python ci-dessous permet de calculer la somme S .

Compléter ce programme puis répondre à la question posée.

`u=... ; S=...`

`for i in range(2,):`

`.....`

`.....`

`print(S)`

b) Retrouver la valeur de S à l'aide d'une autre méthode.

Exercice 4 : variable aléatoire

Les trois parties sont indépendantes

Partie A

La loi de probabilité est donnée par le tableau ci-dessous :

x_i	-3	1	4
$P(X = x_i)$	0,4	0,3	0,3

1. Calculer l'espérance de X : $E(X)$.
2. Calculer la variance de X : $V(X)$.
3. En déduire une valeur approchée à deux décimales de l'écart-type de X noté $\sigma(X)$

Partie B

On s'intéresse ici à plusieurs dés truqués à 6 faces. X est la variable aléatoire qui donne le chiffre obtenu lors du lancer de dé.

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	0,1	...	0,1	0,1	0,2	0,2

Donner, sans justifier, à l'aide de la calculatrice l'espérance de X: $E(X)$ ainsi que l'écart-type de X noté $\sigma(X)$. Arrondir à 2 décimales

Partie C

Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée ci-dessous

Sachant que $E(X) = 3,25$, déterminer en justifiant les probabilités manquantes x et y .

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	x	y	0,7

Exercice 5 : variable aléatoire - contextualisation

Un casino a décidé d'installer un nouveau jeu pour ses habitués. Une machine affiche un écran tactile avec 200 rectangles identiques, sur lesquels le joueur peut appuyer.

Pour cela il mise 2 euros. Puis une fois qu'un des rectangles est pressé, il affiche le résultat :

- 2 rectangles permettent au joueur de gagner 42 €.
- 4 rectangles permettent au joueur de gagner 12 €.
- 10 rectangles permettent au joueur de gagner 5 €.
- 44 rectangles permettent au joueur de gagner 0,50 €.
- pour les autres rectangles, le joueur ne gagne rien.

Soit G la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur.

1. Représenter sous la forme d'un tableau la loi de probabilité de la variable aléatoire G. (tenir compte de la mise !!!)

2. Calculer l'espérance de G et interpréter cette valeur.

3. Le directeur du casino estime que le gain de ce nouveau jeu est faible.

Il souhaite modifier la valeur maximale du gain. Pour qu'un client rapporte en moyenne 1,08 € au casino, quelle doit être la valeur du gain maximal ? Justifier.

Exercice 6 : variable aléatoire et fonction du 3^{ème} degré

On dispose d'une urne contenant 3 boules blanches, 3 boules noires et 3 boules rouge (indiscernables au toucher). On suppose que le gain de base vaut x . (x est positif ou nul)

Un joueur tire une boule dans cette urne.

Si la boule tirée est blanche, il perd le cube du gain de base.

Si la boule tirée est noire, il gagne le carré du gain de base.

Si la boule tirée est rouge, il gagne le gain de base.

1. Déterminer la loi de probabilité associée au gain du joueur appelée X .
2. Montrer que l'espérance du gain du joueur est $f(x) = \frac{1}{3}(-x^3 + x^2 + x)$.
3. Déterminer pour quelles valeurs de x , le jeu est équitable. (factoriser par x).
4. Déterminer, en justifiant, pour quelle valeur de x , l'espérance de gain est maximale.