Devoir à la maison numéro 3 (entrainement pour le ds1) Pour le 10/10/23

Exercice 1 :automatismes1 et 2

1.Soit n un entier. Ecrire A,B et C sous la forme 2^p. (ne pas prendre de valeur pour n)

$$A = 2^n \times 2^{n-1} \qquad B = \frac{2^{3-n} \times 2^{n+2}}{(2^n)^{-4}} \qquad C = (2^{n-1})^3 \times 2^{-n}$$

2.Résoudre $(x-1)^2 = 4$ puis $x^4 = 64$ (on remarquera que $x^4 = (x^2)^2$)

3.Démontrer que pour tout x diffférent de -1, $\frac{2x+5}{x+1} = 2 + \frac{3}{x+1}$.

4.Déterminer une équation de la droite (AB) passant par A(1 ;3) et B(4 ;9).

Exercice 2 : expression à l'aide d'un tableau de signe.

On se donne ci-dessous le tableau de signe d'une fonction polynôme du second degré f.

x	$-\infty$		-3		-2		$+\infty$
$f(x)$		-	0	+	0	-	

Parmi les expressions ci-dessous, une seule correspond à l'expression de $f(x)$. Laquelle ? **Justifier.**

$2(x+2)(x+3)$ expression 1 $\quad -3(x-2)(x-3)$ expression 2

$4(x-2)(x-3)$ expression 3 $\quad -4(x+2)(x+3)$ expression 4

Exercice 3 :fonction python et second degré

Voici deux programmes écrits en Python :

```
def f(x):
    a=(x+3)**2
    b=-a
    c=b+4
    return c
```

```
def g(x):
    a=x+1
    b=x+5
    c=-a*b
    return c
```

*__Remarques__ : **2 signifie sur Python élever au carré*

1.Déterminer l'expression de $f(x)$ et de $g(x)$.

2. Calculer $f(0)$; $g(0)$; $f(-3)$; $g(-3)$.

3.Quelle conjecture peut-on émettre ? Démontrer cette conjecture.

Exercice 4 : polynome du second degré sous forme factorisée (1 + 0,5+0,5+1 = 3 points)

Les 2 questions sont indépendantes

1.Déterminer la fonction polynome du second degré f s'annulant en 3 et -8 et telle que $f(6) = 84$.

2. Soit f la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 48x - 50$. On admet que f a deux racines.

a) Démontrer que 1 est une racine de f.
b) Donner la somme S et le produit P des racines de f.
c) Déterminer la deuxième racine de f.

Exercice 5 : retrouver l'expression d'une fonction polynôme du second degré

Soit f une fonction polynôme du second degré telle que $f(15) = 0$ et $f(-13) = 0$ .On suppose de plus que la courbe de f passe par le point $A(5\,;-540)$.

1.Déterminer l'expression factorisée de $f(x)$.

2.Déterminer le tableau de signe de $f(x)$ puis résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $f(x) > 0$.

Exercice 6 : somme et produit de racines

Soit le polynôme du second degré $f(x) = 3x^2 - 2x - 8$.

1.Trouver une racine évidente de ce polynôme.

2.En utilisant vos connaissances sur la somme et le produit des racines, déterminer la deuxième racine de $f(x)$.

Exercice 7 : signe d'un polynome du second degré sous forme factorisée

Les questions 1,2,3 sont indépendantes

1. Soit f une fonction polynôme du second degré dont les racines sont 1 et -5 et le coefficient a vaut $a = 2$.

Recopier et compléter le tableau de signes ci-dessous:

x	$-\infty$ … … $+\infty$
$f(x)$	… 0 … 0 …

2. Soit f la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3(x-2)(x+3)$.

a) Etudier le signe de $f(x)$ en fonction des valeurs de x. (faire un tableau de signe – écrire une phrase de justification)

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) < 0$.

3. Soit f la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = (x+1)(2x+7) + (x+1)(x+2)$.

a) Factoriser $f(x)$.

b) Résoudre l'inéquation $f(x) \leq 0$.

Exercice 8 : forme canonique

Les 2 questions sont indépendantes

1.Soit f la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 6x + 4$. Déterminer la forme canonique de f.

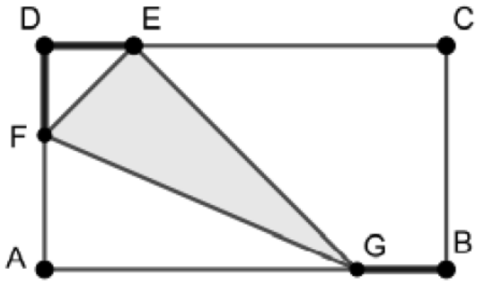
2.Soit g la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -5x^2 + 10x - 3$. Déterminer la forme canonique de g.

Exercice 9 : optimisation à l'aide de la forme canonique

ABCD est un rectangle tel que AB=9cm et BC=5cm.

E,F et G sont respectivement les points des segments [CD], [AD] et [AB] tels que : DF=DE=BG.

On pose $x = DF$.



1.Préciser à quel intervalle appartient x, puis démontrer que l'aire du triangle EFG est égale à $\boldsymbol{-x^2 + 7x}$.

On pose $\boldsymbol{f(x) = -x^2 + 7x}$.

2.Déterminer la forme canonique de $\boldsymbol{f(x)}$.

3.En utilisant la question précédente, déterminer, en justifiant, pour quelle valeur de $\boldsymbol{x}$, l'aire du triangle EFG est maximum et trouver cette aire.

(rappel :Soit $\boldsymbol{f}$ une fonction définie sur I
$\boldsymbol{f}$ admet un maximum en $\boldsymbol{a}$ de valeur $\boldsymbol{f(a)}$ si pour tout réel $\boldsymbol{x}$ de I , $\boldsymbol{f(x) \leq f(a)}$)

Exercice 10 : dérivabilité – nombre dérivé

Les questions 1,2,3 sont indépendantes

1.Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 1$ .On dispose d'une capture d'écran d'un logiciel de calcul formel.

1	$f(x) = \frac{1}{x^2+3}$ $\rightarrow$ $\mathbf{f(x) = \frac{1}{x^2+3}}$
2	$r(h) = \frac{\frac{1}{(-1+h)^2+3} - \frac{1}{(-1)^2+3}}{h}$ $\rightarrow$ $\mathbf{r(h) = \frac{-h+2}{4\,h^2 - 8\,h + 16}}$
3	$r(h) = \frac{-h+2}{4\,(h-2)^2}$ $\rightarrow$ $\mathbf{r(h) = \frac{-1}{4\,h-8}}$

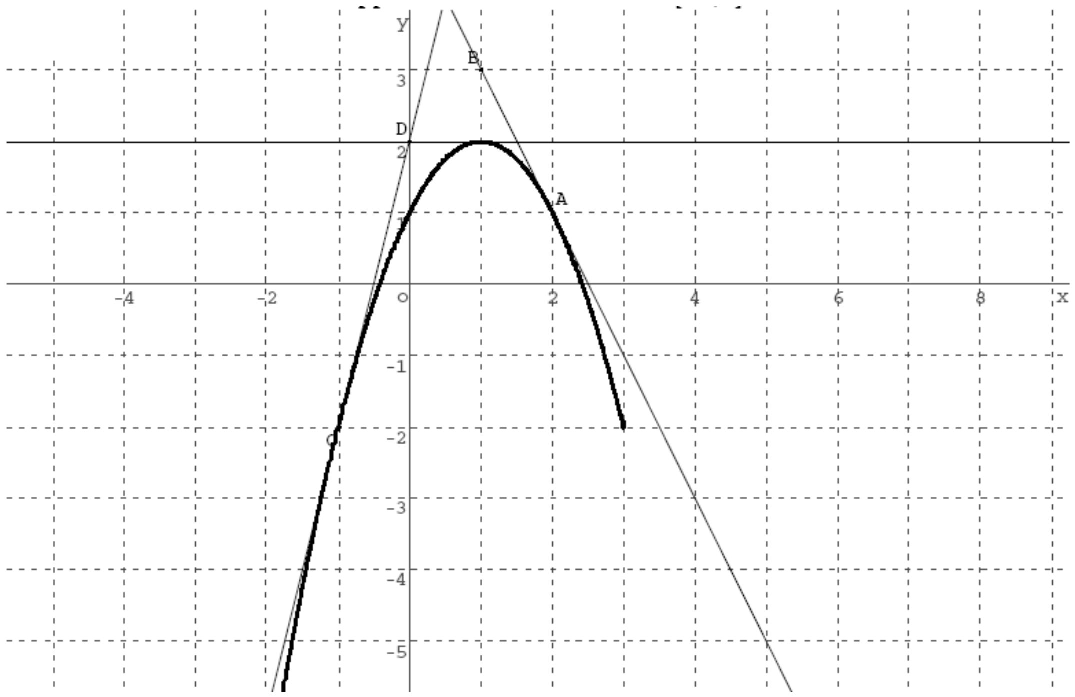
a) Que représente $r(h)$?

b) Donner $\lim\limits_{h\to 0} r(h)$.

c) Que peut on en déduire ?

2. La fonction racine carrée est-elle dérivable ? Si oui sur quel intervalle ? Donner l'expression de sa dérivée.

3.Soit f une fonction dérivable de courbe C représentée ci-dessous.
Sont représentées également les tangentes aux points d'abscisses -1 , 1 et 2.

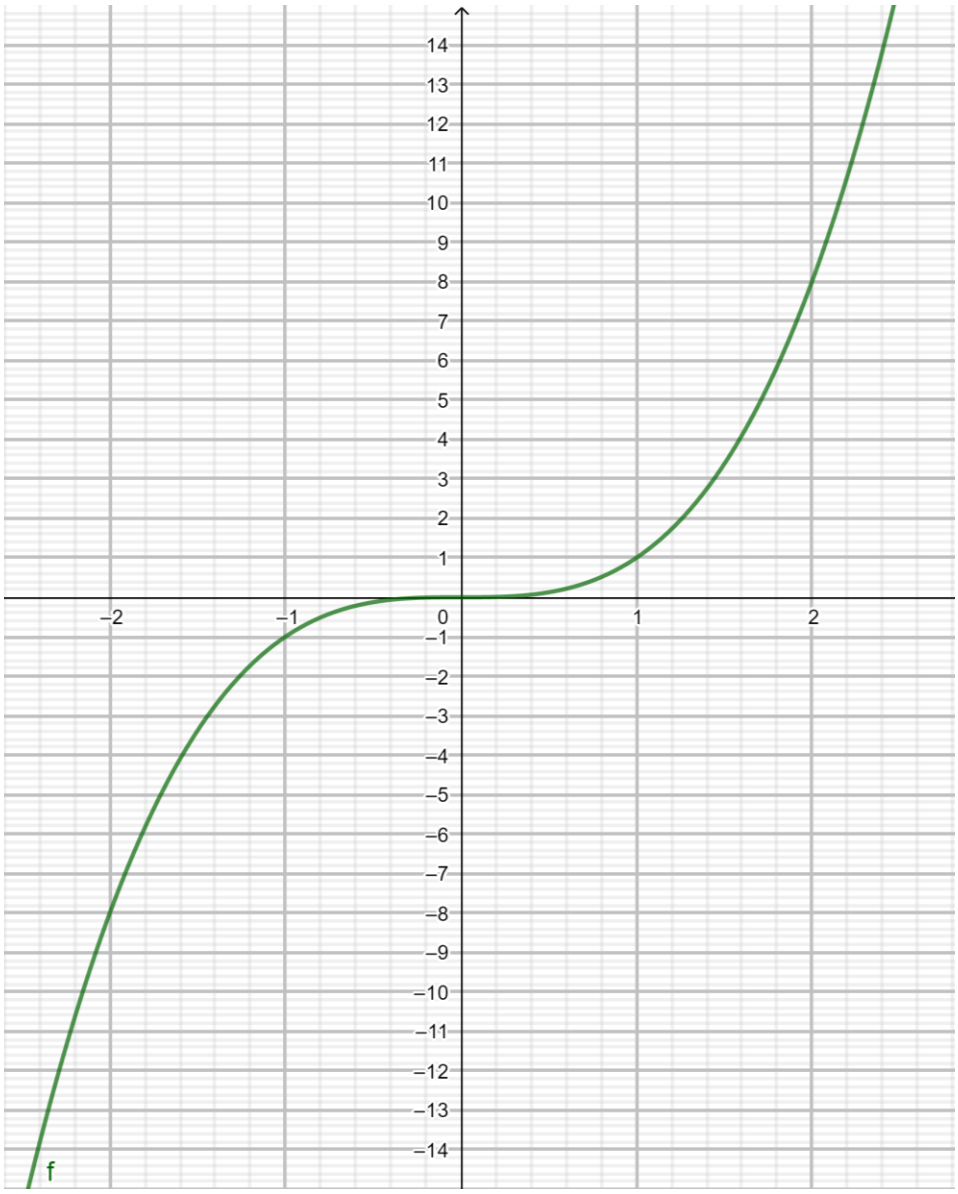


Déterminer, **en justifiant**, $f'(-1)$, $f'(1)$ et $f'(2)$.

<u>Exercice 11 : tangente parallèle à une droite</u>

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

1. Donner pour tout réel x, $f'(x)$.
2. Calculer $f(1)$ et $f'(1)$.
3. On a représenté ci-dessous la courbe de f . Tracer sans justifier la tangente au point d'abscisse 1 ainsi que la tangente au point d'abscisse 0.



4. Existe-t-il une tangente T à Cf parallèle à la droite d d'équation $y = 15x + 1$? Si oui , déterminer les coordonnées du ou des points de contact entre Cf et T.

<u>Exercice 12 : équation réduite d'une tangente</u>

1. cours : si f est une fonction dérivable en a , donner sans justifier une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a.

2.Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

a)Donner pour tout réel $x > 0$, $f'(x)$.

b) Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2.