Devoir à la maison numéro 9 pour le 06/02

Exercice 1 : monotonie d'une suite

Les questions 1,2,3 sont indépendantes.

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = n^2 + n + 6$.

a) Conjecturer la monotonie de la suite (u_n).

b) Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = 2n + 2$.

c) Démontrer la conjecture de la question a).

2. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{1}{2n+1}$.

a) Conjecturer la monotonie de la suite (u_n).

b) Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \frac{-2}{(2n+3)(2n+1)}$.

c) Démontrer la conjecture de la question a).

3. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n - n^2$.

a) Conjecturer la monotonie de la suite (u_n).

b) Démontrer cette conjecture.

Exercice 2 : suite et probabilité conditionnelle

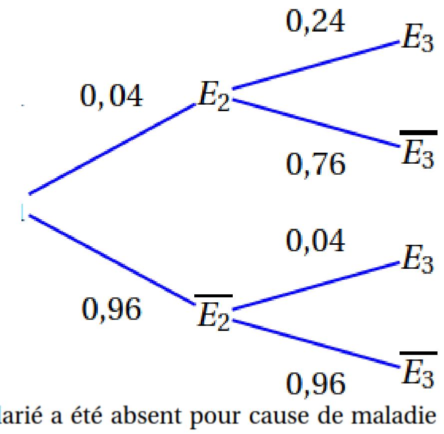
Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

- Un salarié malade est absent
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
- Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,04$.
- Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,24$.

On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par E_n l'évènement « le salarié est absent pour cause de maladie la n-ième semaine ». On note p_n la probabilité de l'évènement E_n.
On a ainsi : $p_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $0 \leqslant p_n < 1$.

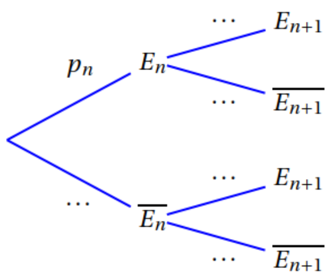
1. **a.** Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre de probabilité.

(on pourra exploiter l'arbre ci-dessous)



b. Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.

2. **a.** Recopier sur la copie et compléter l'arbre de probabilité donné ci-dessous



b. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,04$.

c.Le programme ci-dessous permet de créer la liste des termes de la suite de p_1 à p_n.
Compléter cet algorithme puis écrire une fonction python d'argument n qui renvoie cette liste (joindre une capture d'écran) .A l'aide de Python , conjecturer la limite de la suite (p_n). (expliquer brièvement votre démarche)

```
p = 0
L = [p]
for i in range(.....) :
    p = ⋯.
    L=  .....
```

d.On admet que la suite (p_n) est croissante. On dispose du programme ci-dessous :

```
p = 0
n = 1
while 0,05 − p > 0,000 000 01
    p = 0,2p + 0,04
    n =  n + 1
```

Que représente la valeur de n stockée en fin d'algorithme ? Donner cette valeur.

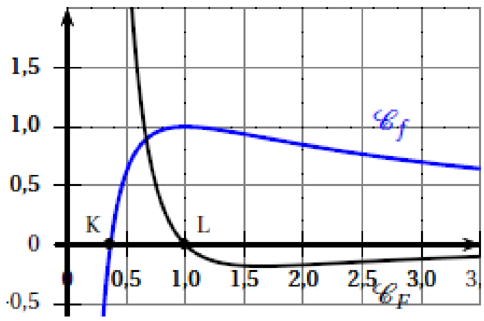
<u>Exercice 3 : tableau de variations – lecture graphique</u>

1.Compléter le tableau de variations ci-dessous :

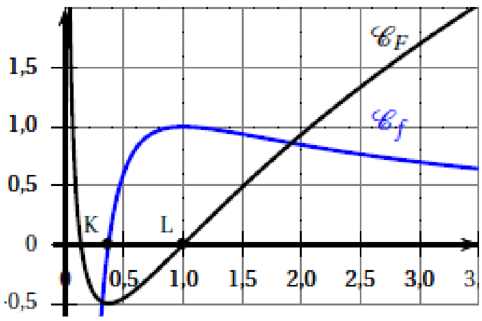
x	$-\infty$		-4			3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	…		…	-	
$f(x)$			-5	↗		2		

2.Soit F une fonction dérivable sur]0 ;+∞[. On admet que la dérivée de F est la fonction f $(c'est\ à\ dire\ F' = f)$. Parmi les 3 situations ci-dessous , une seule est juste. Laquelle ? Justifier.

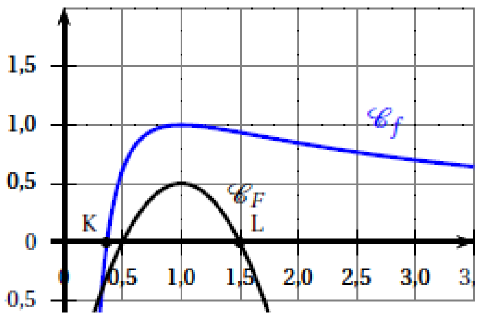
Situation 1



Situation 2



Situation 3



<u>Exercice 4 : étude d'une fonction rationnelle</u>

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{4x+7}{x^2+2}$.

1.Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis démontrer que $f'(x) = \frac{-4x^2-14x+8}{(x^2+2)^2}$.

2.Déterminer en justifiant le tableau de variations complet de la fonction f.

Exercice 5 : position relative d'une courbe par rapport à une tangente

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-2 ; 3]$ par $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x + 15$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Déterminer la dérivée de f.

2. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 de $\mathscr{C}$.

3. On s'intéresse à la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la tangente T. On considère la fonction g définie sur $[-2 ; 3]$ par $g(x) = f(x) - (12x + 16)$.

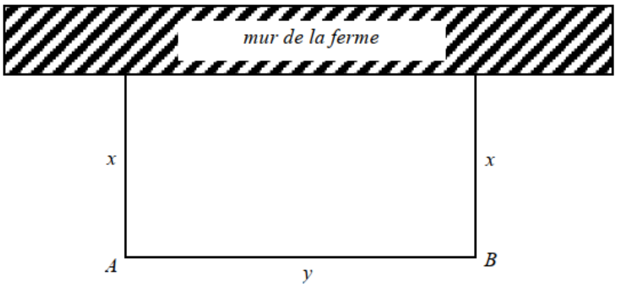
a. Étudier le sens de variation de g sur $[-2 ; 3]$ et calculer $g(-0,5)$.

b. En déduire le signe de g sur $[-2 ; 3]$.

c. Déterminer la position de T par rapport à $\mathscr{C}$ sur $[-2 ; 3]$.

Exercice 6 : résolution d'un problème

Un fermier décide de réaliser un poulailler (en forme rectangulaire) le long du mur de sa maison. Ce poulailler devra avoir une aire de 392 m^2. Où doit-on placer les piquets A et B pour que la longueur de la clôture soit minimale ?



La figure ci-dessus représente le poulailler accolé à la ferme en *vue de dessus*. On appelle x la distance séparant chaque piquet au mur et y la distance entre les 2 piquets A et B. (On a donc $x > 0$ et $y > 0$)

1. Sachant que l'aire du poulailler est 392 m^2, exprimer y en fonction de x.
2. Démontrer que la longueur $\ell(x)$ du grillage est : $l(x) = \dfrac{2x^2 + 392}{x}$
3. Calculer la dérivée ℓ' de ℓ. En déduire le tableau de variation de ℓ.
4. En déduire les dimensions x et y pour lesquelles la clôture a une longueur minimale. Préciser cette longueur.

Exercice 7 :

Soient f et g deux fonctions dérivables sur l'intervalle $I = [0 ; 1]$ telles que : $f(0) = g(0)$ et $f' \leqslant g'$ sur I.

Démontrer que $f \leqslant g$ sur I. (On pourra étudier les variations de $g - f$)