Correction des exercices 46,47,50,51,52,54page 176

Exercice 46p176

a. Faux : $e^{7a} = (e^{a})^{7}$.

b. Vrai : $e^2 \times (e^a)^3 = e^2 \times e^{3a} = e^{2+3a}$

c. Faux, $e^{5(a+1)} = e^{5a} \times e^5 = e^5 \times (e^a)^5$.

b. Vrai : $e^{-2(a-1)} = e^{-2a+2} = e^{-2a} \times e^2 = \frac{1}{e^{2a}} \times e^2 = \frac{e^2}{e^{2a}}$

Exercice 47p176

1. $A = e^{1+x} \times e^x = e^{1+x+x} = e^{1+2x}$
2. $B = e^{2-x} \times e^{3-x} = e^{2-x+3-x} = e^{5-2x}$
3. $C = (e^{-x})^2 \times e^{0,1x} = e^{-2x} \times e^{0,1x} = e^{-2x+0,1x} = e^{-1,9x}$

Exercice 50p176

50 Pour tout réel x,

$A = \frac{e \times e^{3x-1}}{e^{x+1}} = \frac{e^1 \times e^{3x-1}}{e^{x+1}}$ car $e = e^1$

$A = \frac{e^{1+3x-1}}{e^{x+1}} = \frac{e^{3x}}{e^{x+1}}$

$A = e^{3x-(x+1)}$ donc $A = e^{2x-1}$.

Pour tout réel x,

$B = \frac{e^x \times e^{x+1}}{e^{x-1}} = \frac{e^{x+x+1}}{e^{x-1}}$

$B = \frac{e^{2x+1}}{e^{x-1}} = e^{2x+1-(x-1)}$

Donc $B = e^{x+2}$.

Pour tout réel x,

$C = \frac{e^{2-x} \times (e^{2x+1})^3}{e^{-x-1} \times e^{2x}} = \frac{e^{2-x} \times e^{3(2x+1)}}{e^{-x-1+2x}}$

$C = \frac{e^{2-x+3(2x+1)}}{e^{x-1}} = \frac{e^{5x+5}}{e^{x-1}}$

$C = e^{5x+5-(x-1)}$ donc $C = e^{4x+6}$.

51 Pour tout réel x, on a : $(1+3e^x)(e^x-3) = e^x - 3 + 3e^{2x} - 9e^x = 3e^{2x} - 8e^x - 3$.

Exercice 52p176

Pour tout réel x,

$$\frac{e^{1+x}}{e^{-x}+e^x} = \frac{e^{1+x}}{\frac{1}{e^x}+e^x} = \frac{e^{1+x}}{\frac{1}{e^x}+\frac{e^x e^x}{e^x}} = \frac{e^{1+x}}{\frac{1+e^x e^x}{e^x}} = e^{1+x} \times \frac{e^x}{1+e^{2x}} = \frac{e^{1+x} \times e^x}{1+e^{2x}} = \frac{e^{1+2x}}{1+e^{2x}}$$

Exercice 54p176

Pour tout réel x,

$$1 - \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{1+e^{-x}}{1+e^{-x}} - \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{1+e^{-x}-e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{1}{1+\frac{1}{e^x}} = \frac{1}{\frac{e^x}{e^x}+\frac{1}{e^x}} = \frac{1}{\frac{e^x+1}{e^x}} = \frac{e^x}{1+e^x}$$

Correction des exercices 62p176,68a)p177 et 72p177

Dans les exercices 61 à 65, déterminer le signe des expressions données sur $\mathbb{R}$.

61 $A(x) = 5e^x - xe^x$ et $B(x) = x^2e^x - xe^x$

62 $A(x) = e^x - 2xe^x$ et $B(x) = xe^{-x} - x^2e^{-x}$

61b)

B(x)= $x^2e^x - xe^x = e^x(x^2 - x)$

$e^x > 0$. Ainsi $B(x)$ est du signe de $x^2 - x = x(x-1)$. C'est un polynôme du second degré dont les racines sont 0 et 1.

Le polynôme $x^2 - x$ est du signe de $a = 1$ à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$B(x)$		+	0	-	0	+	

B(x) est strictement positive sur l'intervalle $]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$
B(x) est strictement négative sur l'intervalle $]0; 1[$
B(x) s'annule en 0 *et* 1

62

A(x)= $e^x - 2xe^x = e^x(1 - 2x)$

$e^x > 0$. Ainsi $A(x)$ est du signe de $1 - 2x$.

$1 - 2x > 0 + \Leftrightarrow -2x > -1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$ à *gauche*

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$A(x)$		+	0	-	

A(x) est strictement positive sur l'intervalle $]-\infty; \frac{1}{2}[$

A(x) est strictement négative sur l'intervalle $]\frac{1}{2}; +\infty[$

A(x) s'annule en $\frac{1}{2}$

B(x)= $xe^{-x} - x^2e^{-x} = e^{-x}(x - x^2)$

$e^{-x} > 0$. Ainsi $B(x)$ est du signe de $x - x^2 = x(1-x)$. C'est un polynôme du second degré dont les racines sont 0 et 1.

Le polynôme $-x^2 + x$ est du signe de $a = -1$ à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$B(x)$		-	0	+	0	-	

B(x) est strictement négative sur l'intervalle $]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$
B(x) est strictement positive sur l'intervalle $]0; 1[$

B(x) s'annule en 0 *et* 1

Pour les exercices 68 à 70, résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations proposées.

Capacité 3, p. 171

68 **a.** $e^{x^2} = e^x$ **b.** $e^{-2x} - 1 = 0$

$e^{x^2} = e^x \Leftrightarrow x^2 = x$

$\Leftrightarrow x^2 - x = 0$

$\Leftrightarrow x(x-1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \; ou \; x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \; ou \; x = 1$ S= {0 ; 1}

72 **1.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $X^2 + 6X - 7 = 0$.

2. En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation :

$$e^{2x} + 6e^x - 7 = 0.$$

Piste : Poser $X = e^x$.

1.$a = 1$ $b = 6$ $c = -7$

$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times 1 \times (-7) = 64$

Δ>0 .L'équation $X^2 + 6X - 7 = 0$ admet donc deux solutions :

$$X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6-\sqrt{64}}{2} = \frac{-6-8}{2} = -7$$

$$X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6+\sqrt{64}}{2} = \frac{-6+8}{2} = 1$$

$S = \{-7 \,; 1\}$

2.On doit résoudre l'équation : $e^{2x} + 6e^x - 7 = 0$

$$e^{2x} + 6e^x - 7 = 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 + 6e^x - 7 = 0$$

On fait le changement de variable X=e^x.

X est alors solution de l'équation $X^2 + 6X - 7 = 0$.

X peut prendre deux valeurs : -7 et 1

$e^x = -7$ ou $e^x = 1$

Or l'équation $e^x = -7$ n'a pas de solutions car $e^x > 0$

$e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0$ $S = \{0\}$

Exercice :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$,l'équation : $2e^{2x} + 4e^x - 6 = 0$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$,l'équation : $e^x + 3 - 4e^{-x} = 0$

1. $2e^{2x} + 4e^x - 6 = 0 \Leftrightarrow 2(e^x)^2 + 4e^x - 6 = 0$

On fait le changement de variable X=e^x.

X est alors solution de l'équation $2X^2 + 4X - 6 = 0$.

$a = 2 \qquad b = 4 \qquad c = -6$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 64$

Δ>0 .L'équation $2X^2 + 4X - 6 = 0$ admet donc deux solutions :

$$X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4-\sqrt{64}}{4} = -3$$

$$X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4+\sqrt{64}}{4} = 1$$

X peut prendre deux valeurs : -3 et 1

$e^x = -3$ ou $e^x = 1$

Or l'équation $e^x = -3$ n'a pas de solutions car $e^x > 0$

$e^x = 1 \quad \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0 \quad S = \{0\}$

2. $e^x + 3 - 4e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^x + 3 - \frac{4}{e^x} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{e^x e^x}{e^x} + \frac{3e^x}{e^x} - \frac{4}{e^x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(e^x)^2 + 3e^x - 4}{e^x} = 0$$

$$\Leftrightarrow (e^x)^2 + 3e^x - 4 = 0$$

On fait le changement de variable X=e^x.

X est alors solution de l'équation $X^2 + 3X - 4 = 0$.

$a = 1 \qquad b = 3 \qquad c = -4$

$\Delta = b^2 - 4ac = 25$

Δ>0 .L'équation $X^2 + 3X - 4 = 0$ admet donc deux solutions :

$$X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-\sqrt{25}}{2} = -4$$

$$X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+\sqrt{25}}{2} = 1$$

X peut prendre deux valeurs : -4 et 1

$e^x = -4$ ou $e^x = 1$

Or l'équation $e^x = -4$ n'a pas de solutions car $e^x > 0$

$e^x = 1 \quad \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0 \qquad S = \{0\}$

75 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a. $1 - e^{x^2-1} \geqslant 0$ **b.** $e^{x+3} \geqslant \frac{1}{e}$

$a)\ 1 - e^{x^2-1} \geq 0 \Leftrightarrow -e^{x^2-1} \geq -1$

$\Leftrightarrow e^{x^2-1} \leq 1$

$\Leftrightarrow e^{x^2-1} \leq e^0$ *($e^a<e^b$ équivaut à $a<b$)*

$\Leftrightarrow x^2 - 1 \leq 0$ *(inéquation du second degré)*

de $x^2 - 1^2 = (x-1)(x+1)$. *($a^2-b^2=(a-b)(a+b)$)*

C'est un polynôme du second degré dont les racines sont -1 et 1.

Le polynôme $x^2 - 1$ est du signe de $a = 1$ à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		+	0	-	0	+	

$x^2 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$ *S=[-1 ;1]*

$a)\ e^{x+3} \geq \frac{1}{e} \Leftrightarrow e^{x+3} \geq e^{-1}$

$\Leftrightarrow x + 3 \geq -1$

$\Leftrightarrow x \geq -4$ *S=[-4 ;+∞[*

87 CALC Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (5-x)e^x.$$

1. Exprimer $f'(x)$ en fonction de x.

2. a. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

b. Construire le tableau de variation de f.

3. Tracer à l'aide de la calculatrice la courbe représentative de f.

Capacité 5, p. 172

f est **dérivable** sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x,

- $f=uv$
- $u(x) = 5 - x$ $u'(x) = -1$
  $v(x) = e^x$ $v'(x) = e^x$
- $f'=u'v + uv'$
  $f'(x) = -1e^x + (5-x)e^x$
  $= e^x(-1+5-x)$
  $= e^x(-x+4)$

$e^x > 0$. Ainsi $f'(x)$ est du signe de $-x+4$.

$-x + 4 > 0 \Leftrightarrow -x > -4 \Leftrightarrow x < 4.$

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗	e^4	↘	

f est croissante sur $]-\infty\,;4]$ et décroissante sur $[4\,;+\infty[$ $f(4)=e^4$.

89 Reprendre l'exercice **87** avec la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(e^x+1)(e^x-3)$.

f est **dérivable** sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x,

- $f=uv$
- $u(x)=e^x+1$ $u'(x)=e^x$
  $v(x)=e^x-3$ $v'(x)=e^x$
- $f'=u'v+uv'$
  $f'(x)=e^x(e^x-3)+(e^x+1)e^x$
  $=e^x(e^x-3+e^x+1)$
  $=e^x(2e^x-2)$
  $=2e^x(e^x-1)$
  $2e^x>0$. Ainsi $f'(x)$ est du signe de e^x-1.

$$e^x-1>0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow e^x>e^0 \Leftrightarrow x>0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		↘	-4	↗	

f est décroissante sur $]-\infty;0]$ et croissante sur $[0\,;+\infty[$. $f(0)=(e^0-3)(e^0+1)=-4$

90 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x^2}{2e^x}$.

1. Démontrer que $f'(x)$ est du signe de $2x-x^2$.

2. En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

1. f est **dérivable** sur $\mathbb{R}$ car de la forme $\frac{u}{v}$ où u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ $(v(x)\neq 0)$

Pour tout réel x,

- $f = \frac{u}{v}$
- $u(x) = x^2 \quad u'(x) = 2x$
  $v(x) = 2e^x \quad v'(x) = 2e^x$
- $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$f'(x) = \frac{2x2e^x - x^2 2e^x}{(2e^x)^2}$$
$$= \frac{2e^x(2x - x^2)}{4e^{2x}}$$
$$= \frac{2e^x x(2-x)}{4e^{2x}}$$
$$= \frac{x(2-x)}{2e^{2x-x}}$$
$$= \frac{x(2-x)}{2e^x}$$

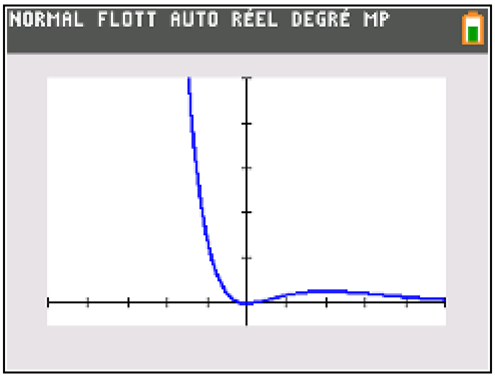
$e^x > 0$. Ainsi $f'(x)$ est du signe de $x(2-x) = -x^2 + 2x$.

2.C'est un polynôme du second degré dont les racines sont 0 et 2.
Le polynôme $-x^2 + 2x$ est du signe de $a = -1$ à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	↘		0	↗	$2e^{-2}$	↘	

f est décroissante sur $]-\infty\,; 0]$ et $[2\,; +\infty[$ et croissante sur $[0; 2]$

$f(0) = \frac{0^2}{2e^0} = 0 \quad f(2) = \frac{2^2}{2e^2} = \frac{2}{e^2} (= 2e^{-2})$



92 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x-2}{e^x}$.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère.
1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 3.

1. f est **dérivable** sur $\mathbb{R}$ car de la forme $\frac{u}{v}$ où u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ $(v(x) \neq 0)$

Pour tout réel x,

- $f = \frac{u}{v}$
- $u(x) = x - 2 \quad u'(x) = 1$
  $v(x) = e^x \quad v'(x) = e^x$
- $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

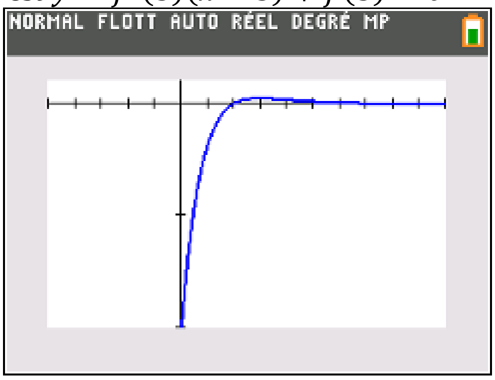
$$f'(x) = \frac{1e^x - (x-2)e^x}{(e^x)^2}$$
$$= \frac{e^x(1 - x + 2)}{e^{2x}}$$
$$= e^{x-2x}(-x+3)$$
$$= e^{-x}(-x+3)$$

$e^{-x} > 0$. Ainsi $f'(x)$ est du signe de $-x + 3$
$-x + 3 > 0 \Leftrightarrow -x > -3 \Leftrightarrow x < 3$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗	e^{-3}	↘	

f est croissante sur $]-\infty\,;3]$ et décroissante sur $[3\,;+\infty[$ $\quad f(3) = \frac{3-2}{e^3} = \frac{1}{e^3} (= e^{-3})$.

2. Au point d'abscisse 3 , la tangente est horizontale car $f'(3) = 0$.
Une équation de la tangente est $y = f'(3)(x-3) + f(3) = e^{-3}$



93 Soit f la fonction définie sur $[2\,;10]$ par $f(x) = \frac{e^x}{x^2 - 3}$.

1. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ est du signe de $x^2 - 2x - 3$.

2. En déduire le tableau de variation de f sur $[2\,;10]$.

1. f est **dérivable** sur $\mathbb{R}$ car de la forme $\frac{u}{v}$ où u et v sont dérivables sur $[2; 10]$ $(v(x) \neq 0$ $en\ effet\ x > 2\ donc\ x^2 > 4\ et\ x^2 - 3 > 1 > 0))$

Pour tout réel x de $[2; 10]$,

- $f = \frac{u}{v}$
- $u(x) = e^x \qquad u'(x) = e^x$
  $v(x) = x^2 - 3 \qquad v'(x) = 2x$
- $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2-3) - e^x 2x}{(x^2-3)^2}$$
$$= \frac{e^x(x^2-3-2x)}{(x^2-3)^2}$$
$$= \frac{e^x(x^2-2x-3)}{(x^2-3)^2}$$

$e^x > 0$ et $(x^2-3)^2 > 0$. Ainsi $f'(x)$ est du signe de $x^2 - 2x - 3$

2. $a = 1 \qquad b = -2 \qquad c = -3$
$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$
$\Delta > 0$ .Le polynôme du second degré $x^2 - 2x - 3$ admet donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2)-\sqrt{16}}{2} = -1$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2)+\sqrt{16}}{2} = 3$$

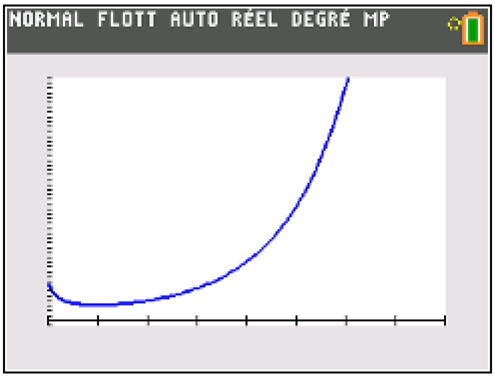
Le polynôme $x^2 - 2x - 3$ est du signe de $a = 1$ à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$		-1	2		3		10 $+\infty$
$x^2 - 2x - 3$		$+$	0		$-$	0	$+$	

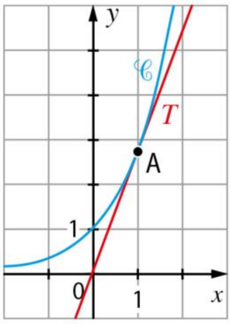
x	2		3		10
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$\frac{e^3}{6}$	↗	

f est croissante sur $[3 ; 10]$ et décroissante sur $[2; 3]$

$f(3) = \frac{e^3}{3^2-3} = \frac{e^3}{6}$



103 On a représenté ci-contre la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction exponentielle ainsi que la tangente T à $\mathscr{C}$ en son point A d'abscisse 1.



1. Faire une conjecture sur la position de $\mathscr{C}$ par rapport à T.

2. Démontrer qu'une équation de T est :

$$y = \mathrm{e}x.$$

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}x.$$

a. Exprimer $f'(x)$ en fonction de x.

b. Etudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

c. Construire le tableau de variation de la fonction f.

4. Démontrer la conjecture faite dans la question **1**.

1.Il semble que C est au dessus de T sauf au point d'abscisse 1 où elles sont sécantes.

2.exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc en 1.
Une équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 1 est :
$(y = f'(a)(x - a) + f(a) \quad a = 1)$
$y = exp'(1)(x - 1) + exp(1)$

Soit $y = exp'(1)(x - 1) + e^1 = e(x - 1) + e = ex - e + e = ex.$

3.a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que différence de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x , $f'(x) = e^x - e$

b) $e^x - e > 0 \Leftrightarrow e^x > e \Leftrightarrow e^x > e^1 \Leftrightarrow x > 1$

c)

x	-∞	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	0	↗

f est croissante sur $]-\infty\,; 1]$ et décroissante sur $[1; +\infty[$
$f(1) = e^1 - e \times 1 = e - e = 0$

4.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	↘	0	↗
$f(x)$	+	*0*	+
Position relative de C par rapport à T	*C est au dessus de T*	*	*C est au dessus de T*

*C et T sont sécants au point d'abscisse 1.

Exercices 39p175, 42p175,94,95,96p178,109,110p179,111,112p180

39 Soit f_1, f_2, f_3 et f_4 les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f_1(x) = e^{0,1x}$, $f_2(x) = e^{-10x}$, $f_3(x) = e^{-x+1}$ et $f_4(x) = e^{2x-3}$.
Parmi ces fonctions, lesquelles sont croissantes sur $\mathbb{R}$? Justifier.

Toutes ces fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,
$f'_1(x) = 0{,}1e^{0,1x}$.
Or $e^{0,1x} > 0$. $f'_1(x)$ est du signe de 0,1 donc $f'_1(x) > 0$
On en déduit que la fonction f_1 est croissante sur $\mathbb{R}$
$f'_2(x) = -10e^{-10x}$
Or $e^{-10x} > 0$. $f'_2(x)$ est du signe de -10 donc $f'_2(x) < 0$
On en déduit que la fonction f_2 est décroissante sur $\mathbb{R}$

$f'_3(x) = -e^{-x+1}$
Or $e^{-x+1} > 0$. $f'_3(x) < 0$
On en déduit que la fonction f_3 est décroissante sur $\mathbb{R}$
$f'_4(x) = 2e^{2x-3}$
Or $e^{2x-3} > 0$. $f'_3(x) > 0$
On en déduit que la fonction f_4 est croissante sur $\mathbb{R}$

42 Histoire des mathématiques

La fonction f qui, à l'altitude x en kilomètres, associe la pression atmosphérique en hectopascals est définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=1\,013{,}25e^{-0{,}12x}.$$

1. Calculer $f'(x)$. Déterminer le sens de variation de f.

2. En 1648, Blaise Pascal et Florin Périer mesurent la hauteur de mercure dans deux baromètres, l'un situé à Clermont-Ferrand et l'autre en haut de la montagne la plus proche, le Puy-de-Dôme. Dans quel baromètre la hauteur de mercure était-elle la plus petite ?

1.La fonction f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et pour tout réel $x\geq 0$,
$f'(x)=1013{,}25\times -0{,}12e^{-0{,}12x}=-121{,}59e^{-0{,}12x}$
$e^{-0{,}12x}>0$. $f'(x)$ est donc du signe de -121,59 c'est-à-dire $f'(x)<0$

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	-
$f(x)$	1013,25 ↘

f est décroissante sur $[0;+\infty[$. $f(0)=1013{,}25e^{0}=1013{,}25$

2. La hauteur de mercure était la plus petite dans celui du Puy-de-Dôme.

..

94 CALC Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=xe^{-2x}$.

1. Montrer que pour tout réel x, $f'(x)=(1-2x)e^{-2x}$.

2. Étudier les variations de la fonction f.

3. Tracer à l'aide de la calculatrice la courbe $\mathscr{C}_f$.

1. f est **dérivable** sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x,

- $f=uv$
- $u(x)=x$ $\qquad u'(x)=1$
  $v(x)=e^{-2x}$ $\qquad v'(x)=-2e^{-2x}$
- $f'=u'v+uv'$
  $f'(x)=1e^{-2x}-2xe^{-2x}$
  $\qquad=e^{-2x}(1-2x)$

2.$e^{-2x}>0$.
On en déduit que $f'(x)$ est du signe de $1-2x$.
$1-2x>0 \iff -2x>-1 \iff x<\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗	$\frac{1}{2e}$	↘	

f est croissante sur $]-\infty\,;\frac{1}{2}]$ et décroissante sur $[\frac{1}{2}\,;+\infty[$ $\quad f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}e^{-1}=\frac{1}{2e}$.

Pour les exercices 95 à 97 calculer $f'(x)$ puis étudier les variations de la fonction f.

95 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=20xe^{-0,1x+3}$.

f est **dérivable** sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x,

- $f=uv$
- $u(x)=20x \qquad u'(x)=20$
  $v(x)=e^{-0,1x+3} \qquad v'(x)=-0,1e^{-0,1x+3}$
- $f'=u'v+uv'$
  $f'(x)=20e^{-0,1x+3}+20x(-0,1)e^{-0,1x+3}$
  $\quad=e^{-0,1x+3}(20-2x)$

$e^{-0,1x+3}>0$.
On en déduit que $f'(x)$ est du signe de $20-2x$.
$20-2x>0 \Leftrightarrow -2x>-20 \Leftrightarrow x<10$

x	$-\infty$		10		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	200 e^2	↘	

f est croissante sur $]-\infty\,;10]$ et décroissante sur $[10\,;+\infty[$ $\quad f(10)=200e^2$.

96 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x+e^{-x+1}$.

f est **dérivable** sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $f'(x)=1-e^{-x+1}$

$1-e^{-x+1}>0 \Leftrightarrow -e^{-x+1}>-1 \Leftrightarrow e^{-x+1}<1 \Leftrightarrow e^{-x+1}<e^0 \Leftrightarrow -x+1<0 \Leftrightarrow -x<-1 \Leftrightarrow x>1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$		↘	2	↗	

f est décroissante sur $]-\infty\,;1]$ et croissante sur $[1\,;+\infty[$ $\quad f(1)=2$.

MATHS & PHYSIQUE

109 CALC Une brioche qui était dans une étuve à 30 °C est placée dans un four chauffé à 180 °C pendant 35 minutes.

La température au cœur de la brioche, exprimée en degrés Celsius, est donnée sur l'intervalle [0 ; 35] par une fonction du temps t, exprimé en minutes, de la forme $f(t) = a\mathrm{e}^{-0{,}022t} + 180$.

1. Sachant que $f(0) = 30$, calculer la valeur de a.

2. a. Justifier que $f'(t) = 3{,}3\mathrm{e}^{-0{,}022t}$ pour tout réel t de l'intervalle [0 ; 35].

b. En déduire les variations de f sur [0 ; 35].

c. Interpréter le résultat de la question précédente dans le contexte de l'exercice.

3. À l'aide d'une calculatrice, déterminer le temps nécessaire, en minutes, pour que la température au cœur de la brioche soit supérieure à 100 °C.

Capacité 6, p. 172

109 **1.** $f(0) = a + 180 = 30$, donc $a = -180 + 30 = -150$.

2. a. $f'(t) = -150 \times (-0{,}022)e^{-0{,}022t} = 3{,}3\mathrm{e}^{-0{,}022t}$

b. Sur [0 ; 35] $f'(t) > 0$ donc f est croissante sur [0 ; 35].

c. La température au cœur de la brioche augmente avec le temps.

3. Il faut environ 29 minutes pour que la température au cœur de la brioche soit supérieure à 100° C.

110 Une entreprise s'apprête à lancer sur le marché un nouveau jouet. Les ventes espérées ont été modélisées par la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 18] par $f(x) = 5x\mathrm{e}^{-0{,}2x}$.

où x représente le nombre de jours écoulés depuis le début de la campagne publicitaire et $f(x)$ le nombre de milliers de jouets vendus le x-ième jour.

1. Démontrer que $f'(x) = (5 - x)\mathrm{e}^{-0{,}2x}$.

2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur [0 ; 18] puis dresser le tableau de variation de la fonction f sur [0 ; 18].

3. Déterminer le nombre de jours au bout duquel le maximum de ventes par jour est atteint. Préciser la valeur de ce maximum, arrondie à l'unité.

1. f est **dérivable** sur [0 ;18] en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x de $[0;18]$,

- $f = uv$
- $u(x) = 5x$ $\qquad u'(x) = 5$
  $v(x) = e^{-0{,}2x}$ $\qquad v'(x) = -0{,}2e^{-0{,}2x}$
- $f' = u'v + uv'$
  $f'(x) = 5e^{-0{,}2x} + 5x(-0{,}2)e^{-0{,}2x}$
  $= e^{-0{,}2x}(5 - x)$

$e^{-0{,}2x} > 0$.

On en déduit que $f'(x)$ est du signe de $5 - x$.

$5 - x > 0 \iff -x > -5 \iff x < 5$

x	0		5		18
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$25e^{-1}$	$\searrow$	$90e^{-3,6}$

3. Le maximum de ventes est atteint au bout de 5 jours.
Il y aura alors environ 9 197 jouets vendus.

f est croissante sur [0 ; 5] et décroissante sur [5; 18] .
3.D'après le tableau de variations de f , f admet un maximum en 5 de valeur f(5)=25e^{-1}.
Le maximum de ventes est atteint au bout de 5 jours. Le nombre maximal de jouets vendus sera de 9 197 jouets.

MATH & ÉCONOMIE

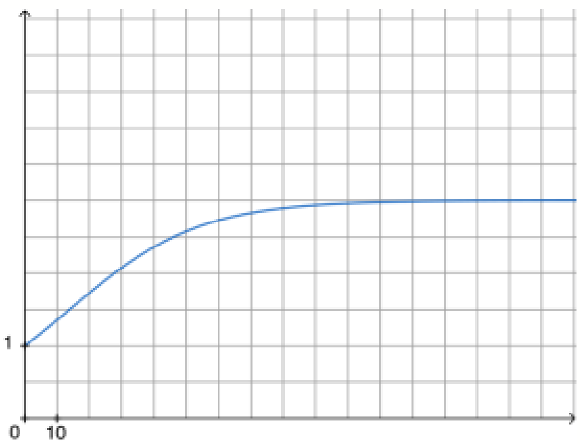
111 On s'intéresse à la croissance d'une ville depuis le 1er janvier 2019. On modélise l'évolution de sa population par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{3}{1+2e^{-0,05x}}$ où $f(x)$ est le nombre d'habitants, en centaines de milliers, au 1er janvier de l'année 2019 + x.
1. Quel est le nombre d'habitants en 2019 ?
2. a. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $[0\,;+\infty[$.
b. Déterminer le sens de variation de f.
3. a. Tracer dans un repère orthogonal la courbe représentative de f (on prendra comme unités graphiques : 0,1 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées).
b. Par lecture graphique, déterminer à partir de quelle année la population de la ville sera supérieure à 200 000 habitants.

111 **1.** $f(0)=1$, en 2019 il y a 100 000 habitants.

2. a. $f'(x)=\dfrac{0{,}3e^{-0,05x}}{(1+2e^{-0,05x})^2}$, comme sur $[0\,;\,+\infty[$, $(1+2e^{-0,05x})^2>0$ et $0{,}3e^{-0,05x}>0$, alors $f'(x)>0$.

b. Sur $[0\,;\,+\infty[$, f est croissante.

3. a.



b. La population de la ville sera supérieure à 200 000 habitants à partir de 2047.

112 On note $y(t)$ la valeur, en degrés Celsius, de la température d'une réaction chimique à l'instant t (exprimé en heures). On admet que la fonction qui, à tout réel t appartenant à l'intervalle $[0\ ;+\infty[$, associe $y(t)$ est définie par $y(t)=(20t+10)e^{-\frac{1}{2}t}$.

1. Étudier les variations de la fonction y sur $[0\ ;+\infty[$.

2. En déduire au bout de combien de temps la température de cette réaction chimique est maximale.

112 **1.** $y'(t)=e^{-\frac{1}{2}t}(15-10t)$

Comme sur $[0\ ;+\infty[$, $e^{-\frac{1}{2}t}>0$, le signe de $f'(t)$ est celui de $15-10t$.

t	0		$1{,}5$		$+\infty$
$y'(t)$		$+$	0	$-$	
$y(t)$	10	$\nearrow$	$40e^{-0{,}75}$	$\searrow$	

2. La température de la réaction est maximale au bout d'une heure et demie.