Exercices 28,29,30,31p318

28 Une boîte contient quatre jetons marqués « 1 », « 2 », « 3 », « 4 ». On en tire un jeton au hasard. Si le nombre marqué est pair, on gagne un nombre de points égal au double de ce nombre. Et si le nombre marqué est impair on perd un nombre de points égal au nombre marqué.
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque issue, associe le nombre de points gagnés.

a. Quelle est l'issue qui permet de gagner 4 points ?

b. Quelle est l'issue qui correspond à l'événement $\{X=-3\}$? Que vaut $P(X=-3)$?

c. Quelles sont les issues qui correspondent à l'événement $\{X<4\}$? Que vaut $P(X<4)$?

Capacité 1, p. 309

issues	*1*	*2*	*3*	*4*
gains	*-1*	*4*	*-3*	*8*

a) L'issue qui permet de gagner 4 points est l'issue « 2 »

b) L'issue associée à l'évènement {X=-3} est « 3 » $P(X=-3)=\frac{1}{4}$

valeurs possibles x_i	*-3*	*-1*	*4*	*8*
Probabilités $P(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

c) Les **issues** associées à l'évènement $\{X<4\}$ sont : « 1 » ou « 3 »

$P(X<4)= P(X=-3)+P(X=-1)= \frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

29 Un carton contient 5 billes jaunes, 3 billes rouges et 4 billes vertes. On tire simultanément 3 billes du carton. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de 3 billes, associe le nombre de billes vertes obtenues.

a. Quelles sont les valeurs prises par X ?

b. Décrire l'événement $\{X=2\}$, puis l'événement $\{X\geqslant 1\}$.

Capacité 2, p. 309

a.Les valeurs prises par X sont : 0,1,2,3

b.L'évènement {X=2} est formé par les tirages de 3 billes dont 2 exactement sont vertes

L'évènement {X≥1} est formé par les tirages de 3 billes dont au moins une est verte

30 ORAL On place dans un sac cinq étiquettes sur lesquelles est écrit un mot de la phrase ci-dessous.

LE HASARD CONDUIT LE MONDE

On tire une étiquette au hasard du sac et on compte le nombre de voyelles du mot.

a. À quelle variable aléatoire X peut-on s'intéresser ?

b. Quelles sont les valeurs prises par X ?

c. Quelles sont les issues qui correspondent à l'événement $\{X = 2\}$?

a) On peut s'intéresser à la variable X, qui à chaque tirage d'une étiquette , associe le nombre de voyelles du mot écrit sur l'étiquette.
b)X prend les valeurs :1,2,3
c)L'évènement {X=2} est composé des issues : « HASARD » et « MONDE »

31 On lance deux pièces de monnaie : on gagne 1 € si on obtient deux fois « pile », sinon on perd 1 €.

a. À quelle variable aléatoire G peut-on s'intéresser ?

b. Quelles sont les valeurs prises par G ?

c. Quelles sont les issues de l'expérience aléatoire correspondant à l'événement $\{G = -1\}$?

a)On peut s'intéresser à la variable G, qui à chaque lancer de deux pièces , associe le gain algébrique obtenu.
b)La variable G prend les valeurs -1 et 1
c)L'évènement {G=-1} est composé des issues PF FP et FF.

<u>Exercices 20,21p317 ,32,33,34,35,36,37,38,39,40,41p318-319</u>

20 Une urne contient quatre boules ; une rouge et trois noires. On tire une boule au hasard. On gagne 2 € si la boule tirée est rouge et on perd 1 € si la boule tirée est noire.

a. Quelle est la probabilité de l'événement « obtenir une boule rouge » ?

b. Soit X la variable aléatoire, qui à chaque tirage d'une boule, associe le gain du joueur.
Déterminer $P(X = 2)$ et $P(X = -1)$.

20 a. L'urne contient quatre boules dont une seule boule rouge et on tire une boule au hasard, donc la probabilité de l'événement « obtenir une boule rouge » est égale à $\frac{1}{4}$.

b. La variable aléatoire X associe, à chaque boule tirée, le gain obtenu.
Or c'est seulement en tirant une boule rouge qu'on gagne 2 euros, donc l'événement $\{X = 2\}$ est l'événement « la boule tirée est rouge » . On a alors $P(X = 2) = \frac{1}{4}$.
L'événement $\{X = -1\}$ est l'événement contraire de l'événement $\{X = 2\}$.
Donc $P(X = -1) = 1 - P(X = 2) = \frac{3}{4}$.

21 Yassine paye une mise de 2 € puis il choisit au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes :
– si la carte est un « As », il reçoit 5 € ;
– si la carte est une figure (valet, dame ou roi), il reçoit 3 € ;
– dans les autres cas il perd sa mise.
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage d'une carte, associe le gain de Yassine. Ce gain est positif ou négatif et tient compte de la mise de départ.
Expliquer et compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de cette variable aléatoire X.

x_i	3	1	…
$P(X=x_i)$	$\frac{4}{32}$	$\frac{12}{32}$	…

Dans ce jeu , en misant 2 € , on peut soit gagner 5 € soit gagner 3€ soit perdre notre mise.
Le gain algébrique est donc 5-2=3€ , 3-2=1 € ou 0-2=-2€.
Les valeurs prises par X sont donc -2,1 et 3.
$P(X=-2)=\frac{16}{32}$ $P(X=1)=\frac{12}{32}$ $P(X=3)=\frac{4}{32}$

valeurs possibles x_i	*3*	*1*	*-2*
Probabilités P(X = x_i)	$\frac{4}{32}$	$\frac{12}{32}$	$\frac{16}{32}$

$(\frac{4}{32}+\frac{12}{32}+\frac{16}{32}=1)$

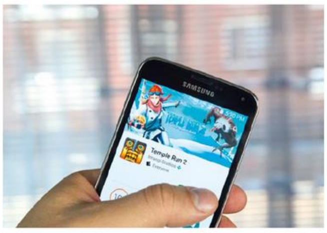
32 Soit N la variable aléatoire donnant le nombre de caisses en service à l'ouverture d'un supermarché. La loi de probabilité de N est donnée par le tableau ci-après.

a	1	2	3	4	5
$P(N=a)$	0,2	0,3	0,3	0,1	m

a. Déterminer le réel m.
b. Calculer $P(N \geqslant 3)$ et donner une interprétation de ce nombre.

a) $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$
Ainsi $0,2+0,3+0,3+0,1+m=1$ et donc $m=1-0,9=0,1$
b) $P(N \geq 3)=P(N=3)+P(N=4)+P(N=5)=0,3+0,1+0,1=0,5$

33 Vincent télécharge au plus cinq jeux par mois sur son smartphone. On note N la variable aléatoire qui, à un mois donné, associe le nombre de jeux téléchargés.



La loi de N est donnée par le tableau ci-dessous.

n_i	0	1	2	3	4	5
$P(N = n_i)$	0,13	0,28	…	0,07	0,3	0,1

1. Calculer la probabilité manquante.

2. Quelle est la probabilité que Vincent télécharge :

a. au moins 3 jeux ?

b. au plus 4 jeux ?

1. Soit x la probabilité manquante.

$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$

Ainsi $0{,}13 + 0{,}28 + x + 0{,}07 + 0{,}3 + 0{,}1 = 1$ et donc $x = 1 - 0{,}88 = 0{,}12$

2. a) $P(N \geq 3) = 0{,}07 + 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}47$

b) $P(N \leq 4) = 1 - P(N > 4) = 1 - P(N = 5) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$

34 Vrai ou Faux ?

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque élève de 1re, associe le nombre de connexions un jour donné à l'ENT de son lycée.
La loi de X est donnée dans le tableau ci-dessous.

Nombre de connexions k	0	1	2	3	4
$P(X = k)$	0,15	0,38	0,35	a	0,03

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

a. La valeur de a est 0,09.

b. $P(X \leqslant 2) = 0{,}88$.

c. La probabilité que l'élève se connecte au moins une fois est égale à 0,47.

a) $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$

Ainsi $0{,}15 + 0{,}38 + 0{,}35 + a + 0{,}03 = 1$ et donc $a = 1 - 0{,}91 = 0{,}09$ VRAI

b) $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}88$ VRAI

c) $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 0{,}85$ FAUX

35 Un commercial vend entre 0 et 4 pompes à chaleur en une semaine.
Soit X la variable aléatoire qui, à une semaine donnée, associe le nombre de pompes à chaleur vendues.
La loi de probabilité de X est donnée dans le tableau suivant.

Nombre k de pompes vendues	0	1	2	3	4
$P(X = k)$	0,26	0,23	…	0,15	0,05

a. Calculer la probabilité de vendre exactement deux pompes à chaleur en une semaine.

b. Déterminer la probabilité de vendre au moins deux pompes à chaleur en une semaine.

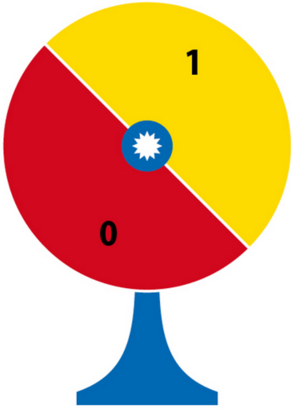
a)Soit x la probabilité manquante.

$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$

Ainsi $0{,}26 + 0{,}23 + x + 0{,}15 + 0{,}05 = 1$ et donc $x = 1 - 0{,}69 = 0{,}31$

b) $P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 0{,}51$

36 Une roulette comporte deux secteurs égaux marqués « 0 » et « 1 ». Au début du jeu, on dispose d'une somme de 9 €. On actionne la roulette une fois : si le « 1 » sort, on triple son capital et si le « 0 » sort, on le divise par 3.
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque partie de roulette, associe la somme dont le joueur dispose à la fin du jeu. Donner la loi de probabilité de X.



Capacité 3, p. 309

Les valeurs prises par X sont donc 3 et 27.

$P(X = 3) = \frac{1}{2}$ $\quad P(X = 27) = \frac{1}{2}$

valeurs possibles x_i	*3*	*27*
Probabilités $P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

37 Un jeu de 52 cartes est composé de douze figures (valet, dame ou roi) ; elles valent chacune un point. Les quatre as valent chacun cinq points et les cartes restantes ne valent aucun point.
On tire une carte au hasard. On note X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de points obtenus.
Présenter dans un tableau la loi de probabilité de cette variable aléatoire.

Les valeurs prises par X sont donc 0,1 et 5.

$P(X = 0) = \frac{52-16}{52} = \frac{36}{52}$ $\quad P(X = 1) = \frac{12}{52}$ $\quad P(X = 5) = \frac{4}{52}$

valeurs possibles x_i	*0*	*1*	*5*
Probabilités $P(X = x_i)$	$\frac{36}{52}$	$\frac{12}{52}$	$\frac{4}{52}$

$(\frac{36}{52} + \frac{12}{52} + \frac{4}{52} = 1)$

38 Camille enregistre cinq morceaux différents dans son smartphone. Le temps d'écoute de chacun d'eux est donné dans le tableau suivant.

Morceau	A	B	C	D	E
Temps d'écoute (en sec)	280	200	240	240	200

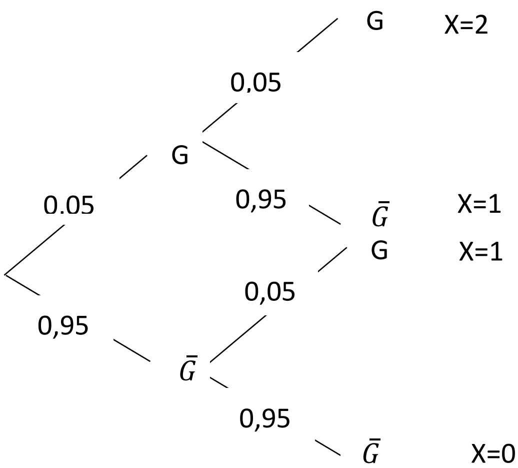
L'application de lecture sélectionne au hasard un des cinq morceaux. Tous les morceaux ont la même probabilité d'être sélectionnés.
On note X la variable aléatoire qui, à tout morceau sélectionné, associe le temps d'écoute de ce morceau.
Présenter dans un tableau la loi de probabilité de X.

Les valeurs prises par X sont donc 200 ,240 et 280.
$P(X=200)=\frac{2}{5}$ $P(X=240)=\frac{2}{5}$ $P(X=280)=\frac{1}{5}$

valeurs possibles x_i	*200*	*240*	*280*
Probabilités P(X = x_i)	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$

39 Un buraliste délivre à chacun des passages de ses clients à la caisse, une carte comportant deux zones de grattage ; pour chaque zone, la probabilité de découvrir « gagné » est 0,05.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque passage en caisse, associe le nombre de zones gagnantes.
a. Déterminer $P(X=0)$ et $P(X=2)$.
b. En déduire $P(X=1)$.



a)L'évènement (X=0) est composé d'une seule issue : $\bar{G}\bar{G}$

$P(X=0)=P(\bar{G}\bar{G})=0{,}95\times 0{,}95=0{,}9025$

L'évènement (X=2) est composé d'une seule issue : GG

$P(X=1)=P(GG)=0{,}05\times 0{,}05=0{,}0025$

b) L'évènement (X=1) est composé de deux issues : $G\bar{G}$ et $\bar{G}G$

$P(X=2)=P(G\bar{G})+P(\bar{G}G)=0{,}05\times 0{,}95+0{,}95\times 0{,}05=0{,}095$

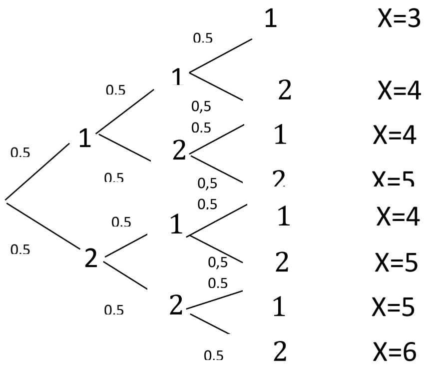
$(0{,}9025+0{,}0025+0{,}095=1)$

MATHS & PHYSIQUE

40 Une machine est alimentée en résistances de 1 et 2 ohms. Elle doit souder successivement trois résistances en série : deux résistances de 2 ohms puis une de 1 ohm. Cette machine est déréglée et elle soude trois résistances au hasard.

Un résultat est noté sous la forme d'un triplet. Par exemple, le triplet (1,1,2) correspond au cas où les deux premières résistances soudées sont des résistances de 1 ohm et la troisième est une résistance de 2 ohms.
On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque triplet, associe la somme des valeurs des trois résistances.
Donner la loi de probabilité de X.

PISTE : Construire un arbre pourra être utile.



Les valeurs prises par X sont 3,4,5,6

$P(X = 3) = P(111) = 0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}5^3 = 0{,}125$

$P(X = 4) = P(112) + P(121) + P(211) = 3 \times\ 0{,}5^3 = 0{,}375$

$P(X = 5) = P(122) + P(212) + P(221) = 3 \times\ 0{,}5^3 = 0{,}375$

$P(X = 6) = P(222) = 0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}5^3 = 0{,}125$

valeurs possibles x_i	3	4	5	6
Probabilités $P(X = x_i)$	0,125	0,375	0,375	0,125

(0,125+0,375+0,375,+0,125=1)

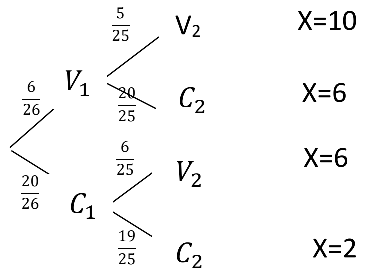
41 Un sac contient 26 jetons marqués chacun avec une des 26 lettres de l'alphabet. On tire un premier jeton, puis un second jeton sans remettre le premier dans le sac.
On gagne 5 € par voyelle tirée et on perd 1 € par consonne tirée.

a. Construire un arbre pondéré illustrant cette expérience.

b. Quelles sont les valeurs possibles du gain algébrique du joueur ?

c. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire qui, à chaque tirage de deux jetons, associe le gain algébrique du joueur.

PISTE : Le gain algébrique du joueur est positif s'il gagne de l'argent, négatif s'il en perd.



Les valeurs prises par X sont 2,6,10

$P(X=2)=P(C_1\cap C_2)=\frac{20}{26}\times\frac{19}{25}=\frac{38}{65}$

$P(X=6)=P(V_1\cap C_2)+P(C_1\cap V_2)=\frac{6}{26}\times\frac{20}{25}+\frac{20}{26}\times\frac{6}{25}=\frac{24}{65}$

$$P(X=10)=P(V_1\cap V_2)=\frac{6}{26}\times\frac{5}{25}=\frac{3}{65}$$

valeurs possibles x_i	*2*	*6*	*10*
Probabilités $P(X=x_i)$	$\frac{38}{65}$	$\frac{24}{65}$	$\frac{3}{65}$

($\frac{38}{65}+\frac{24}{65}+\frac{3}{65}=1$)

Ex24,25,26,27p317,42,43p319 ,45,46,47p320 ,52,53,54,55,56p321 ,57,59,60p322 ,66,67p325sujets A,B et Cp329

24 ORAL La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau ci-contre.
Calculer l'espérance mathématique de X.

x_i	1	2	3
$P(X=x_i)$	0,3	0,5	0,2

$E(X)=0{,}3\times 1+0{,}5\times 2+0{,}2\times 3=1{,}9$

25 CALC La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau ci-contre.

x_i	-1	0	2
$P(X=x_i)$	0,3	0,5	0,2

a. Calculer l'espérance de X, notée $E(X)$.

b. Vérifier que $V(X)=1{,}09$ puis calculer $\sigma(X)$, en arrondissant au centième.

25 a. $E(X) = -1 \times 0{,}3 + 0 \times 0{,}5 + 2 \times 0{,}2 = 0{,}1$.

L'espérance de X est ainsi égale à 0,1.

b. $V(X) = (-1-0{,}1)^2 \times 0{,}3 + (0-0{,}1)^2 \times 0{,}5 + (2-0{,}1)^2 \times 0{,}2$

donc $V(X) = 1{,}09$.

$\sigma(X) = \sqrt{1{,}09} \approx 1{,}04$ au centième près.

26 CALC Une entreprise fabrique des bouées gonflables. Certaines de ces bouées peuvent présenter de 1 à 3 défauts. On appelle N la variable aléatoire qui, à chaque bouée fabriquée, associe le nombre de défauts de la bouée.

La loi de N est donnée par le tableau ci-contre.

n_i	0	1	2	3
$P(N=n_i)$	0,89	0,08	0,02	0,01

Vérifier que $E(N)=0{,}15$.

$E(N) = 0{,}89 \times 0 + 0{,}08 \times 1 + 0{,}02 \times 2 + 0{,}01 \times 3 = 0{,}15$

27 CALC On appelle N le nombre de personnes présentes dans la salle d'attente d'un médecin. La loi de probabilité de N est donnée par le tableau ci-dessous.

n_i	0	1	2	3
$P(N=n_i)$	0,1	0,2	0,3	0,4

À l'aide de la calculatrice, déterminer $E(N)$ et $V(N)$.

$E(N) = 2 \; et \; \sigma(N) = 1 \quad V(N) = \left(\sigma(N)\right)^2 = 1$

42 Soit X la variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau ci-dessous.

x_i	-3	1	4
$P(X=x_i)$	0,2	0,3	0,5

Calculer l'espérance de X, sa variance et une valeur approchée à 10^{-2} près de son écart-type.

Capacité 4, p. 311

$E(X) = 0{,}2 \times (-3) + 0{,}3 \times 1 + 0{,}5 \times 4 = 1{,}7$

$V(X) = 0{,}2 \times (-3 - 1{,}7)^2 + 0{,}3 \times (1 - 1{,}7)^2 + 0{,}5 \times (4 - 1{,}7)^2 = 7{,}21$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{7{,}21} \approx 2{,}69$

43 Une variable aléatoire X a la loi de probabilité suivante (a est un réel).

x_i	-2	0	3
$P(X=x_i)$	a	0,6	0,3

Déterminer le réel a, puis calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X.

$a + 0{,}6 + 0{,}3 = 1$ d'où $a = 0{,}1$

$E(X) = 0{,}1 \times (-2) + 0{,}6 \times 0 + 0{,}3 \times 3 = 0{,}7$

$V(X) = 0{,}1 \times (-2 - 0{,}7)^2 + 0{,}6 \times (0 - 0{,}7)^2 + 0{,}3 \times (3 - 0{,}7)^2 = 2{,}61$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2{,}61} \approx 1{,}62$

45 PROG **Lire et comprendre une fonction Python**

On s'intéresse à un jeu qui consiste à lancer une fois un dé équilibré à 10 faces numérotées de 1 à 10.
La fonction Python ci-dessous permet de simuler une variable aléatoire X modélisant le gain en euros lié à ce jeu (gain positif ou négatif).

```
from random import*
def de():
    i=randint(1,10)
    if 1<=i<=3:
        x=-2
    else:
        x=5
    return(x)
```

1. a. Quelles sont les valeurs prises par cette variable aléatoire ?
b. Quelles sont les issues de l'expérience aléatoire qui correspondent à l'événement $\{X = -2\}$?
En déduire $P(X = -2)$.
2. Déterminer la loi de probabilité de X.
3. Calculer l'espérance de X.

45 **1. a.** La fonction retourne la valeur de la variable x. Suivant la valeur de i, la variable x prendre la valeur -2 ou la valeur 5 : ce sont les valeurs prises par la variables aléatoire X.
b. D'après le test **if** $1 \leq i \leq 3$, la valeur -2 est prise pour chacune des issues 1, 2 et 3 donc l'événement $\{X = -2\}$ correspond aux issues 1, 2 et 3 de l'expérience aléatoire.

2. Le dé étant équilibré et possédant dix faces numérotées de 1 à 10, la probabilité de l'événement $\{X = -2\}$ est égale à $\frac{3}{10}$, c'est-à-dire 0,3.
Puisque X ne prend que deux valeurs, on en déduit la loi de probabilité de X :

x_i	-2	5
$P(X = x_i)$	0,3	0,7

3. $E(X) = -2 \times 0{,}3 + 5 \times 0{,}7 = -0{,}6 + 3{,}5 = 2{,}9$.
L'espérance mathématique de X est donc égale à 2,9.

46 On lance une pièce de monnaie truquée de telle manière que la probabilité d'apparition de la face « PILE » est $\frac{1}{3}$.
Le joueur gagne 9 € si la face visible est « PILE » sinon il perd 3 €.
On note G la variable aléatoire qui, à chaque lancer, associe le gain du joueur.
a. Établir la loi de probabilité de G.
b. Calculer l'espérance mathématique de G, sa variance et son écart-type.

46 **a.** Loi de probabilité de X :

a	9	-3
$P(X = a)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

b. $E(X) = \frac{1}{3} \times 9 + \frac{2}{3} \times (-3) = 1$

$V(X) = \frac{1}{3} \times (9 - 1)^2 + \frac{2}{3} \times (-3 - 1)^2 = \frac{96}{3} = 32$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{32} \approx 5{,}66$

47 On organise une tombola dans un village. Tous les billets, au nombre de 500, sont vendus.
L'un des billets permet de gagner un lot d'une valeur de 620 €, neuf billets permettent chacun de gagner un lot d'une valeur de 70 €, cinquante billets sont remboursés, et les autres sont perdants. Les billets sont vendus 5 €.
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque billet, associe la somme d'argent gagnée (comptée positivement) ou perdue (comptée négativement).

a. Donner les différentes valeurs prises par X.

b. Déterminer la loi de probabilité de X.

c. Calculer l'espérance mathématique de X et donner une interprétation du résultat obtenu.

47 **a.** Les valeurs prises par X sont –5, 0, 65 et 615.

b. Loi de probabilité de X :

a	–5	0	65	615
$P(X = a)$	$\frac{440}{500}$	$\frac{50}{500}$	$\frac{9}{500}$	$\frac{1}{500}$

c. $E(X) = -2$: les participants perdent en moyenne 2 euros.

52 Un forain propose un jeu de hasard. Il dispose de 20 cartes : deux sont vertes, dix sont bleues et les cartes restantes sont rouges. Les cartes sont posées face cachée et un joueur en choisit une :
– si elle est verte, le joueur gagne 50 € ;
– si elle est bleue, rien ne se passe ;
– si elle est rouge, le joueur perd a €.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque partie, associe le gain du joueur en euros.
Calculer a pour que le jeu soit équitable.

PISTE : Le jeu est équitable si l'espérance de la variable aléatoire correspondant au gain est égale à 0.

valeurs possibles x_i	$-a$	0	50
Probabilités $P(X = x_i)$	$\frac{8}{20}$	$\frac{10}{20}$	$\frac{2}{20}$

$$E(X) = \frac{8}{20} \times (-a) + \frac{10}{20} \times 0 + \frac{2}{20} \times 50 = \frac{100-8a}{20} = \frac{25-2a}{5}$$

$E(X) = 0$ *équivaut à* $25 - 2a = 0$ *équivaut à* $-2a = -25$ *soit* $a = 12{,}5$

53 Le gérant d'un casino désire créer un nouveau jeu. Un participant doit au préalable miser 5 €. Une fois la mise donnée, il lance deux dés à six faces et on soustrait le plus petit nombre obtenu au plus grand (résultat toujours positif ou nul). Si le résultat est supérieur ou égal à 3, alors le joueur reçoit n euros sinon il perd sa mise.

1. Montrer que la probabilité que le joueur perde sa mise est $\frac{2}{3}$.

2. En déduire la probabilité que ce joueur gagne la partie.

3. Déterminer la plus grande valeur de n (à l'euro près) afin que ce jeu reste avantageux pour le casino.

53 **1.** On commence par construire un tableau permettant de faire apparaître les valeurs des différences entre les deux nombres marqués par les deux dés (on soustrait le plus petit nombre au plus grand nombre).

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	**3**	**4**	**5**
2	1	0	1	2	**3**	**4**
3	2	1	0	1	2	**3**
4	**3**	2	1	0	1	2
5	**4**	**3**	2	1	0	1
6	**5**	**4**	**3**	2	1	0

Le joueur perd sa mise lorsque la différence entre les deux nombres est strictement inférieure à 3.

L'univers comporte 36 éléments et il y a équiprobabilité.

En comptant dans le tableau précédent, on voit qu'il y a 24 cas où ce joueur peut perdre : la probabilité que le joueur perde sa mise est donc égale à $\frac{24}{36}$, c'est-à-dire $\frac{2}{3}$.

2. On déduit de la question précédente que la probabilité que le joueur gagne est égale à $1 - \frac{2}{3}$, c'est-à-dire $\frac{1}{3}$.

3. On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque lancer de deux dés, associe la somme gagnée par le joueur. Les valeurs prises par X sont $n - 5$ lorsque le joueur gagne et -5 lorsqu'il perd. La loi de probabilité de X est :

$\boldsymbol{x_i}$	$n - 5$	-5
$\boldsymbol{P(X = x_i)}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

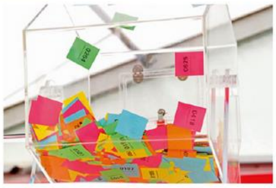
Le jeu reste avantageux pour l'organisateur tant que l'espérance mathématique du joueur est strictement inférieure à 0.

Or $E(X) = (n - 5) \times \frac{1}{3} + (-5) \times \frac{2}{3} = \frac{n-5-5\times2}{3} = \frac{n-5-10}{3} = \frac{n-15}{3}$.

$E(X) < 0$ équivaut à $n - 15 < 0$, c'est-à-dire $n < 15$.

Donc la plus grande valeur de n, à l'euro près, permettant que le jeu reste avantageux pour l'organisateur est 14 euros.

54 CALCULER COMMUNIQUER



Deux tombolas sont organisées par une association. Pour chacune d'entre elles, 100 billets ont été édités et sont vendus 5 € pièce.
La tombola « Extra » permet de gagner un lot d'une valeur de 200 € et dix lots d'une valeur de 20 €.
La tombola « Multi » permet de gagner deux lots de 25 €, dix lots de 15 € et trente lots de 10 €.
Pour les deux tombolas, tous les billets sont vendus.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque billet acheté, associe le gain algébrique du joueur avec la tombola « Extra » et Y celle qui, à chaque billet acheté, associe le gain algébrique du joueur avec la tombola « Multi ».

1. Calculer $E(X)$ et $E(Y)$.

2. Léa décide d'acheter plusieurs billets à la tombola « Extra ». Que peut-on dire de son choix ?

1.Tombola « Extra »

valeurs possibles x_i	*195*	*15*	*-5*
Probabilités P(X = x_i)	$\frac{1}{100} = 0{,}01$	$\frac{10}{100} = 0{,}10$	$\frac{89}{100} = 0{,}89$

$E(X) = 0{,}01 \times 195 + 0{,}10 \times 15 + 0{,}89 \times (-5) = -1$

Tombola « Multi »

valeurs possibles y_i	*20*	*10*	*5*	*-5*
Probabilités P(Y = y_i)	$\frac{2}{100} = 0{,}02$	$\frac{10}{100} = 0{,}10$	$\frac{30}{100} = 0{,}30$	*0,58*

$E(Y) = 0{,}02 \times 20 + 0{,}10 \times 10 + 0{,}30 \times 5 + 0{,}58 \times (-5) = 0$

2.Léa a sans doute fait le mauvais choix car un joueur de la tombola « Extra » perd en moyenne 1 euro alors qu'un joueur de la tombola « Multi » ne perd en moyenne pas d'argent.

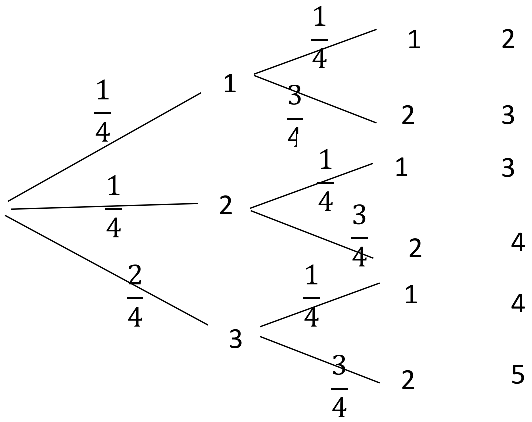
55 On joue avec deux dés tétraédriques (quatre faces). Sur le dé vert, les faces portent les numéros 1, 2, 3 et 3. Sur le dé rouge, les faces portent les numéros 1, 2, 2 et 2. On lance les deux dés et on fait la somme des numéros obtenus.
Deux règles du jeu sont possibles.

Première règle on mise 1 € pour jouer.
– Si la somme est 2, on gagne 6 € ;
– si la somme est 3 ou 4, on gagne 2 € ;
– si la somme est 5, on ne gagne rien.

Deuxième règle on mise 10 € pour jouer.
– Si la somme est 2, on gagne 60 € ;
– si la somme est 3 ou 4, on gagne 12 € ;
– si la somme est 5, on ne gagne rien.

1. Pour les variables aléatoires associées à ces deux règles, calculer l'espérance et l'écart-type.

2. Quelle est la règle la plus intéressante pour l'organisateur de ce jeu ?



Soit X (resp Y) le gain algébrique d'un joueur

<u>1ère règle :</u>

valeurs possibles x_i	*-1*	*1*	*5*
Probabilités P(X = x_i)	$\frac{2}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{6}{16}$	$\frac{3}{16}+\frac{1}{16}+\frac{3}{16}+\frac{2}{16}=\frac{9}{16}$	$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$

$E(X)=\frac{6}{16}\times(-1)+\frac{9}{16}\times 1+\frac{1}{16}\times 5=\frac{8}{16}=0,5$

$V(X)=\frac{6}{16}\times(-1-0,5)^2+\frac{9}{16}\times(1-0,5)^2+\frac{1}{16}\times(5-0,5)^2=2,25$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{2,25}=1,5$

<u>2ème règle :</u>

valeurs possibles y_i	*-10*	*2*	*50*
Probabilités P(Y = y_i)	$\frac{6}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{16}$

$E(Y)=\frac{6}{16}\times(-10)+\frac{9}{16}\times 2+\frac{1}{16}\times 50=\frac{8}{16}=0,5$

$V(Y)=\frac{6}{16}\times(-10-0,5)^2+\frac{9}{16}\times(2-0,5)^2+\frac{1}{16}\times(50-0,5)^2=195,75$

$\sigma(Y)=\sqrt{V(Y)}=\sqrt{195,75}\approx 14$

2.Le gain moyen espéré est le même quel que soit le jeu.
Dans le jeu 1, on peut gagner ou perdre 1,5 euros en plus ou en moins que la gain moyen espéré (0,5 €)
Dans le jeu 2, on peut gagner ou perdre 14 euros en plus ou en moins que la gain moyen espéré (0,5 €)
Le jeu 1 est donc moins risqué

RETOUR SUR L'OUVERTURE DU CHAPITRE

56 La roulette française possède 37 cases numérotées de 0 à 36. La case 0 est verte et les autres cases sont alternativement rouges et noires.

Le jeu consiste à faire tourner la roulette afin qu'une bille tombe dans l'une des cases sachant qu'elle a autant de chances de tomber dans chacune des cases. On va s'intéresser à deux types de pari.

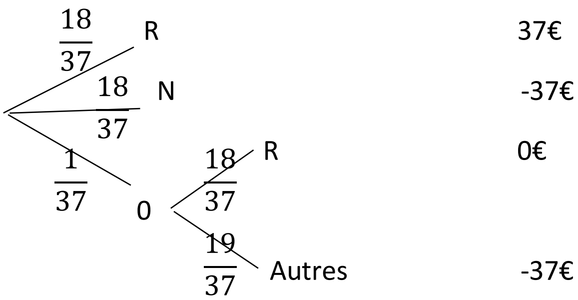
1. Un joueur mise sur son numéro fétiche. Si ce numéro sort, il reçoit 35 fois sa mise et récupère sa mise sinon il la perd.
Quelle est l'espérance de gain du joueur lorsque sa mise est de 37 € ?

2. Un joueur mise 37 € sur la sortie de la couleur « Rouge » :
– si un numéro rouge sort, il reçoit 37 € et récupère sa mise ;
– si un numéro noir sort, il perd sa mise ;
– si le numéro 0 sort, le joueur relance une fois la roulette. Si en relançant la roulette, un numéro rouge sort, le joueur ne gagne rien mais récupère sa mise et si un autre numéro sort (un numéro noir ou le numéro 0), alors le joueur perd sa mise.
Quelle est l'espérance de gain du joueur avec ce pari ?

LE SAVIEZ-VOUS
La roulette a été inventée en Italie au XVIIe siècle. Contrairement à la roulette européenne la roulette américaine possède une case supplémentaire « 00 ».

valeurs possibles x_i	*-37*	*1295*
Probabilités P(X = x_i)	$\frac{36}{37}$	$\frac{1}{37}$

$E(X) = \frac{36}{37} \times (-37) + \frac{1}{37} \times 1295 = -1€$



valeurs possibles x_i	*-37*	*0*	*37*
Probabilités P(X = x_i)	$\frac{18}{37} + \frac{1}{37} \times \frac{19}{37} = \frac{685}{1369}$	$\frac{18}{1369}$	$\frac{18}{37}$

$E(X) = \frac{685}{1369} \times (-37) + \frac{18}{1369} \times 0 + \frac{18}{37} \times 37 = -\frac{19}{37} \approx -0{,}51$

57 Un théâtre propose chaque jour un spectacle au prix de 20 €. Pour en assurer la promotion, chaque client lance, à l'entrée, un dé à six faces non truqué. Si le dé affiche « 6 » son entrée est gratuite, s'il affiche « 1 » l'entrée est demi-tarif, sinon, le client paye plein tarif.
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque résultat du lancer de dés, associe le prix payé par le client.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.

2. Calculer l'espérance de X.

3. Que peut-on en déduire concernant la recette, si la salle composée de 2 000 places est pleine ?

57 1. Loi de probabilité de X :

a	0	10	20
$P(X = a)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$

2. $E(X) = 15$. La recette est en moyenne de 30 000 euros.

59 Un concessionnaire vend entre 0 et 4 voitures d'un même modèle en une semaine.
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque semaine, associe le nombre de voitures vendues. X suit la loi de probabilité suivante.

Nombre de voitures vendues	0	1	2	3	4
$P(X = k)$	0,26	0,23	a	0,15	0,05

1. Calculer a puis l'espérance mathématique de X.

2. En déduire le nombre moyen de voitures vendues sur 52 semaines.

59 1. $a = 0{,}31$ et $E(X) = 1{,}5$.

2. En moyenne, il vend 78 voitures par an.

60 CHERCHER CALCULER

Un jeu consiste à miser 10 €, puis à réaliser un tirage en deux étapes.

1re étape : le joueur tire au hasard un billet dans un panier contenant dix billets marqués « U_1 » et deux billets marqués « U_2 ».

2e étape : – si le joueur obtient un billet « U_1 », il tire un jeton dans l'urne U_1 dans laquelle se trouvent dix jetons « Perdant » et deux jetons « Gagnant ».

– Si le joueur obtient un billet « U_2 », il tire un jeton dans l'urne U_2 dans laquelle se trouvent sept jetons « Perdant » et cinq jetons « Gagnant ».

On note A l'événement « le joueur a tiré un billet marqué U_1 » et G l'événement « le joueur a tiré un jeton Gagnant ».

1. Construire un arbre pondéré qui décrit ce jeu.
2. Calculer la probabilité des événements $G \cap A$ et $G \cap \bar{A}$.
3. Montrer que la probabilité de l'événement G est égale à $\frac{5}{24}$.
4. Déterminer $P_G(A)$.
5. Le joueur reçoit 35 € s'il obtient un jeton gagnant de l'urne U_1 et 60 € s'il obtient un jeton gagnant de l'urne U_2. Sinon il ne reçoit rien et perd sa mise.

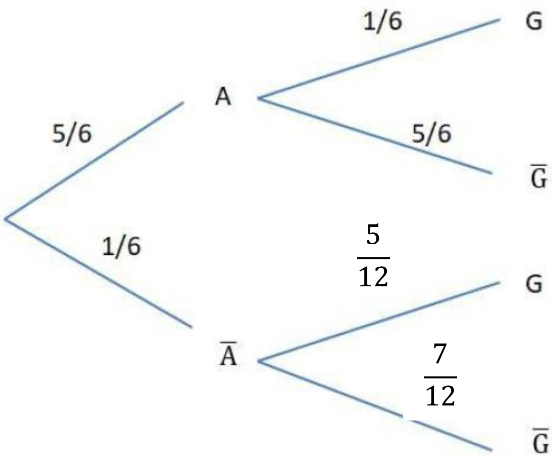
On note X la variable aléatoire qui à chaque partie, associe le gain algébrique du joueur.

a. Quelles sont les valeurs prises par X ?

b. Déterminer la loi de probabilité de X.

c. Ce jeu est-il équitable ?

60 **1.** Arbre pondéré décrivant le jeu :



2. $P(G \cap A) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$ $\qquad$ $P(G \cap \bar{A}) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{12} = \frac{5}{72}$

3.Comme A et $\bar{A}$ forment une partition de l'univers , alors d'après la formule des probabilités totales , on a : P(G)= $P(G \cap A) + P(G \cap \bar{A}) = \frac{5}{36} + \frac{5}{36} = \frac{15}{72} = \frac{5}{24}$.

4. $P_G(A) = \frac{P(G \cap A)}{P(G)} = \frac{\frac{5}{36}}{\frac{5}{24}} = \frac{2}{3}$

5. a. Les valeurs prises par X sont -10, 25 et 50.

b.

x_i	–10	25	50
$P(X = x_i)$	$\frac{57}{72}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{5}{72}$

c. $E(X) = \frac{57}{72} \times (-10) + \frac{5}{36} \times 25 + \frac{5}{72} \times 50 = -\frac{35}{36} \approx -0{,}97$ E(X)<0 . Le jeu n'est donc pas équitable. Il est défavorable au joueur.

Parcours 2 : Calculer l'espérance et l'écart-type d'une variable aléatoire

66 On mise 0,50 € puis on lance un dé cubique équilibré. Si l'on obtient un nombre pair, on gagne le nombre d'euros indiqué sur le dé sinon on perd le nombre d'euros indiqué sur le dé.
Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire G qui, à chaque lancer de dé, associe le gain algébrique obtenu.

67 *Cet exercice est d'un niveau plus élevé.*
On s'intéresse à une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée ci-dessous.

a	-2	2	3	m
$P(X=a)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$

a. Exprimer $E(X)$ en fonction de m.
b. Déterminer la valeur de m permettant que ce jeu soit équitable.
c. Déterminer pour cette valeur de m, $V(X)$ ainsi qu'une valeur approchée à 10^{-2} près de $\sigma(X)$.

MÉTHODE : Pour que le jeu soit équitable, on fait en sorte que l'espérance de la variable aléatoire soit égale à 0.

66 Lorsqu'on obtient le nombre 1 qui est un nombre impair, on perd 1,5 euros car il ne faut pas oublier qu'on a misé 0,5 euro lors du lancer du dé.
Par contre, lorsqu'on obtient le nombre 2 qui est un nombre pair, on gagne 1,5 euros car on reçoit 2 euros mais il ne faut pas oublier qu'on a misé 0,5 euro lors du lancer du dé.
On obtient ainsi la loi de probabilité de G :

g_i	$-5{,}5$	$-3{,}5$	$-1{,}5$	$1{,}5$	$3{,}5$	$5{,}5$
$P(G=g_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$E(G) = -5{,}5 \times \frac{1}{6} - 3{,}5 \times \frac{1}{6} - 1{,}5 \times \frac{1}{6} + 1{,}5 \times \frac{1}{6} + 3{,}5 \times \frac{1}{6} + 5{,}5 \times \frac{1}{6} = 0.$

67 **a.** $E(X) = -2 \times \frac{1}{8} + 2 \times \frac{1}{8} + 15 \times \frac{1}{8} + m \times \frac{1}{8}$, donc $E(X) = \frac{15+m}{8}$.
b. Le jeu est équitable si et seulement si $E(X) = 0$.
Or $E(X) = 0$ si et seulement si $15 + m = 0$, c'est-à-dire $m = -15$.
c. $V(X) = (-2)^2 \times \frac{1}{8} + (2)^2 \times \frac{1}{8} + (3)^2 \times \frac{5}{8} + (-15)^2 \times \frac{1}{8} = \frac{4+4+45+225}{8} = \frac{278}{8} = 34{,}75.$
Donc $\sigma(X) = \sqrt{34{,}75} = \approx 5{,}89$ à 10^{-2} près.

Sujet A 20 min MODÉLISER CALCULER

CAPACITÉS MISES EN ŒUVRE

- *Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire.*
- *Calculer l'espérance mathématique d'une variable aléatoire.*

Pour une promotion commerciale, un magasin offre un billet de loterie à tout acheteur d'un appareil électroménager. Les 500 billets sont numérotés de 001 à 500 et ils sont tous distribués.

À la fin de la promotion, on effectue un tirage au sort à l'issue duquel :

– le numéro 397 gagne 5 000 € ;

– les autres numéros se terminant par 97 gagnent chacun 1 000 € ;

– les 45 autres numéros se terminant par 7 gagnent chacun 100 €.

Il y a ainsi en tout 50 numéros gagnants.

Après l'achat d'un appareil, une personne tire un billet au hasard.

On désigne par X la variable aléatoire qui, au numéro de ce billet, associe le gain correspondant, en euros.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.

2. Calculer son espérance mathématique $E(X)$.

Sujet A

1. Loi de probabilité de X :

a	5 000	1 000	100	0
$P(X = a)$	$\frac{1}{500}$	$\frac{4}{500}$	$\frac{45}{500}$	$\frac{450}{500}$

2. $E(X) = 27$

Sujet B 40 min MODÉLISER CALCULER

CAPACITÉS MISES EN ŒUVRE

- Modéliser à l'aide d'une variable aléatoire.
- Utiliser la notion d'espérance mathématique dans la résolution d'un problème.

Dans un jeu, il s'agit de trouver la bonne réponse à une question posée.
Les questions sont classées en trois catégories : sport, cinéma, musique.
Dans chaque catégorie, il y a le même nombre de questions.
Les trois catégories sont donc équiprobables.
Jeanne, fervente supportrice de ce jeu, est consciente qu'elle a :
– 5 chances sur 6 de donner la bonne réponse sachant qu'elle est interrogée en sport ;
– 2 chances sur 3 de donner la bonne réponse sachant qu'elle est interrogée en cinéma ;
– 1 chance sur 9 de donner la bonne réponse sachant qu'elle est interrogée en musique.

1. Jeanne participe à ce jeu et tire au hasard une question.
Déterminer la probabilité que :
a. la question soit dans la catégorie sport et qu'elle donne la bonne réponse ;
b. sa réponse soit bonne à la question posée.

2. Pour participer à ce jeu, Jeanne doit payer 10 € de droit d'inscription. Elle recevra :
– 10 € si elle est interrogée en sport et que sa réponse est bonne ;
– 20 € si elle est interrogée en cinéma et que sa réponse est bonne ;
– 50 € si elle est interrogée en musique et que sa réponse est bonne ;
– rien si la réponse qu'elle donne est fausse.
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque partie jouée par Jeanne, associe son gain.
On appelle gain la différence en euros entre ce qu'elle reçoit et les 10 € de droit d'inscription.
a. Déterminer la loi de probabilité de X.
b. Calculer l'espérance mathématique de X.
Jeanne a-t-elle intérêt à jouer ?

Sujet B

1. a. $P(S\cap G) = \frac{5}{18}$

b. $P(G) = \frac{29}{54}$

2. a. Loi de probabilité de X :

a	0	10	40	-10
$P(X = a)$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{25}{54}$

b. $E(X) \approx -0{,}92$. Jeanne n'a pas intérêt à jouer.

Sujet C — 40 min — CHERCHER — CALCULER

CAPACITÉS MISES EN ŒUVRE

- *Déterminer des probabilités $P(X = a)$.*
- *Utiliser la notion d'espérance mathématique dans la résolution d'un problème.*

Un jeu de hasard est formé d'un dispositif lançant de façon aléatoire une fléchette dans une cible ayant la forme ci-dessous.

B	B	B	B	B	B	B	B	B	J	J	J	V	V	R
R	V	V	J	J	J	B	B	B	B	B	B	B	B	B

La fléchette atteint toujours une case et une seule. Les trente cases, blanches (B), jaunes (J), vertes (V) ou rouges (R), ont toutes la même probabilité d'être atteintes.

Si la fléchette atteint :

– une case rouge, le joueur gagne 8 euros ;

– une case verte, le joueur gagne 5 euros ;

– une case jaune, le joueur ne gagne rien et ne perd rien ;

– une case blanche, le joueur perd a euros, la lettre a désigne un nombre réel positif.

1. On note X la variable aléatoire représentant le gain algébrique du joueur (compté négativement quand il perd).

a. Donner la loi de probabilité de X.

b. Exprimer l'espérance mathématique de X en fonction de a.

c. Calculer a pour que le jeu soit équitable, c'est-à-dire pour que l'espérance $E(X)$ soit nulle.

2. Un joueur est considéré comme gagnant s'il a obtenu un gain strictement positif.

a. Quelle est la probabilité p qu'un joueur gagne ?

b. Un joueur joue trois parties consécutives indépendantes. Quelle est la probabilité qu'il gagne exactement 2 fois ?

Sujet C

1. a. Loi de probabilité de X :

x_i	8	5	0	$-a$
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{18}{30}$

b. $E(X) = 1{,}2 - 0{,}6a$

c. $a = 2$

2. a. $p = \frac{1}{5}$

b. $p = 0{,}096$