Exercice 70p122

70 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 4x - 1$.

1. Calculer $f'(x)$.

2. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse -1.

1.f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynome. Pour tout réel x,

$$f'(x) = 2 \times 2x \;\; - 4 \times 1 \;+\;\; 0 = 4x - 4$$

2. $f(-1) = 2 \times (-1)^2 - 4 \times (-1) - 1 = \; 2 + 4 - 1 = 5$ et $f'(-1) = 4 \times (-1) - 4 = -8$.

Une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

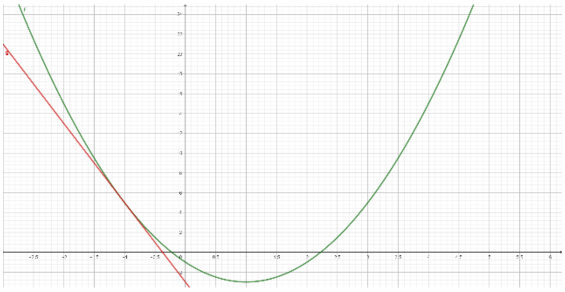
On remplace a par -1.

$y = f'(-1)(x + 1) + f(-1)$

$y = -8(x + 1) + 5$

$y = -8x - 8 + 5$

$y = -8x - 3$



Exercices 80,81p123

Pour les exercices 80 et 81, exprimer, sous forme de fraction, la dérivée des fonctions dont l'expression est donnée.

80 a. $f(x) = \dfrac{1}{x^5}$ **b.** $g(x) = \dfrac{1}{x^7}$ **c.** $h(x) = \dfrac{1}{x^8}$

81 a. $f(x) = \dfrac{2}{x^4}$ **b.** $g(x) = -\dfrac{3}{x^7}$ **c.** $h(x) = \dfrac{5}{x^{10}}$

80a) f est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ car de la forme x^n où n est un entier relatif.

Pour tout réel x de $]-\infty; 0[$ ou de $]0; +\infty[$,

$f(x) = x^{-5}$, $f'(x) = -5x^{-5-1} = -5x^{-6} = -\frac{5}{x^6}$

80b) g est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ car de la forme x^n où n est un entier relatif.

Pour tout réel x de $]-\infty; 0[$ ou de $]0; +\infty[$,

$g(x) = x^{-7}$, $g'(x) = -7x^{-7-1} = -7x^{-8} = -\frac{7}{x^8}$

80c) h est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ car de la forme x^n où n est un entier relatif.

Pour tout réel x de $]-\infty; 0[$ ou de $]0; +\infty[$,

$h(x) = x^{-8}$, $h'(x) = -8x^{-9} = -\frac{8}{x^9}$

81a) f est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ car de la forme $2x^n$ où n est un entier relatif.

Pour tout réel x de $]-\infty; 0[$ ou de $]0; +\infty[$,

$f(x) = 2 \times x^{-4}$, $f'(x) = 2 \times -4x^{-5} = -\frac{8}{x^5}$

81b) g est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ car de la forme $-3x^n$ où n est un entier relatif.

Pour tout réel x de $]-\infty; 0[$ ou de $]0; +\infty[$,

$g(x) = -3 \times x^{-7}$, $g'(x) = -3 \times -7x^{-8} = \frac{21}{x^8}$

81c) h est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ car de la forme $5x^n$ où n est un entier relatif.

Pour tout réel x de $]-\infty; 0[$ ou de $]0; +\infty[$,

$h(x) = 5 \times x^{-10}$, $g'(x) = 5 \times -10x^{-11} = -\frac{50}{x^{11}}$

Exercice 60p122

60 **1.** Soit f la fonction définie sur $]4;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{3x-12}$.
Déterminer l'expression de f'.

2. Soit g la fonction définie pour tout $x > -3$ par :

$$g(x) = \frac{x^2-3x+1}{x+3}.$$

Montrer que pour tout $x > -3$, $g'(x) = \dfrac{x^2+6x-10}{(x+3)^2}$.

Capacité 8, p. 113

1. f est **dérivable** sur $]4; +\infty[$ car de la forme $\frac{1}{v}$ où v est dérivable sur $]4; +\infty[$. $v(x) \neq 0)$

Pour tout réel $x > 4$,

- $f = \frac{1}{v}$
- $v(x) = 3x - 12$ $\quad v'(x) = 3$
- $f' = -\frac{v'}{v^2}$

$$f'(x) = -\frac{3}{(3x-12)^2}$$

2. g est **dérivable** sur $]-3; +\infty[$ car de la forme $\frac{u}{v}$ où u et v sont dérivables sur $]-3; +\infty[$.($v(x) \neq 0)$

Pour tout réel $x > -3$,

- $g = \frac{u}{v}$

- $u(x) = x^2 - 3x + 1$ $\quad u'(x) = 2x - 3$
  $v(x) = x + 3$ $\quad v'(x) = 1$
- $g' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

  $$g'(x) = \frac{(2x-3)(x+3) - (x^2 - 3x + 1)1}{(x+3)^2}$$
  $$= \frac{2x^2 + 6x - 3x - 9 - x^2 + 3x - 1}{(x+3)^2}$$
  $$= \frac{x^2 + 6x - 10}{(x+3)^2}$$

Exercice 62,66p122

62 $i(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 5}$; $\quad$ I = $\mathbb{R}$.

63 $j(x) = -\dfrac{2}{7x + 2}$; $\quad$ I = $[0\,;+\infty[$.

64 $k(x) = \dfrac{3}{0{,}5x^2 + 1}$; $\quad$ I = $\mathbb{R}$.

65 $l(x) = -4x + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$; $\quad$ I = $]0\,;+\infty[$.

66 $m(x) = \dfrac{4x - 3}{x^2 + x}$, $\quad$ I = $]0\,;+\infty[$.

Exercice 62p122

1. i est **dérivable** sur $\mathbb{R}$ car de la forme $\frac{1}{v}$ où v est dérivable sur $\mathbb{R}$. $v(x) \neq 0$)

Pour tout réel x,

- $i = \frac{1}{v}$
- $v(x) = x^2 - 3x + 5$ $\quad v'(x) = 2x - 3$
- $i' = -\frac{v'}{v^2}$

  $$i'(x) = -\frac{2x - 3}{(x^2 - 3x + 5)^2}$$

Exercice 66p122

m est **dérivable** sur $]0; +\infty[$ car de la forme $\frac{u}{v}$ où u et v sont dérivables sur $]0; +\infty[$.($v(x) \neq 0$)

Pour tout réel $x > -3$,

- $m = \frac{u}{v}$
- $u(x) = 4x - 3$ $\quad u'(x) = 4$
  $v(x) = x^2 + x$ $\quad v'(x) = 2x + 1$
- $m' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

  $$m'(x) = \frac{4(x^2 + x) - (4x - 3)(2x + 1)}{(x^2 + x)^2}$$
  $$= \frac{4x^2 + 4x - (8x^2 + 4x - 6x - 3)}{(x^2 + x)^2}$$
  $$= \frac{4x^2 + 4x - 8x^2 - 4x + 6x + 3}{(x^2 + x)^2}$$
  $$= \frac{-4x^2 + 6x + 3}{(x^2 + x)^2}$$

Exercices 77,78p123

Pour les exercices 77 à 79, déterminer l'expression de la dérivée de la fonction donnée. Capacité 9 et 10, p. 115

77 **1.** $f(x) = (-3x+4)^3$ pour tout réel x.

2. $h(x) = \sqrt{2x-10}$ pour tout $x > 5$.

78 **a.** $f(x) = (4x-3)^3$ pour tout réel x.

b $h(x) = \sqrt{-5x+2}$ pour tout $x < 0{,}4$.

Exercice 77p123

a)

$\mathbb{R} \qquad \mathbb{R} \qquad \mathbb{R}$

$x \longrightarrow -3x+4$

$X \xrightarrow{g} X^3$

$x - - - - - - \rightarrow (-3x+4)^3 = f(x) \qquad f(x) = g(-3x+4)$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(X) = 3X^2$

f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f'(x) = -3g'(-3x+4) = -3 \times 3(-3x+4)^2 = -9(-3x+4)^2$$

b)

$]5\,;+\infty[\qquad]0\,;+\infty[\qquad \mathbb{R}$

$x \longrightarrow 2x-10$

$X \xrightarrow{g} \sqrt{X}$

$x - - - - - - \rightarrow \sqrt{2x-10} = h(x) \qquad h(x) = g(2x-10)$

g est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $g'(X) = \frac{1}{2\sqrt{X}}$

h est donc dérivable sur $]5\,;+\infty[$

$$h'(x) = 2g'(2x-10) = 2\frac{1}{2\sqrt{2x-10}} = \frac{1}{\sqrt{2x-10}}$$

Exercice 78p123

a)

$\mathbb{R} \qquad \mathbb{R} \qquad \mathbb{R}$

$x \longrightarrow 4x-3$

$X \xrightarrow{g} X^3$

$x - - - - - \to (4x-3)^3 = f(x)$ $\qquad f(x) = g(4x-3)$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\quad g'(X) = 3X^2$

f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$
$f'(x) = 4g'(4x-3) = 12(4x-3)^2$

b)

$]-\infty;0,4[$ $\quad]0;+\infty[$ $\qquad \mathbb{R}$ $\qquad$ x<0,4 $\quad$ -5x>-2 $\quad$ -5x+2>0

$x \longrightarrow -5x+2$

$X \xrightarrow{g} \sqrt{X}$

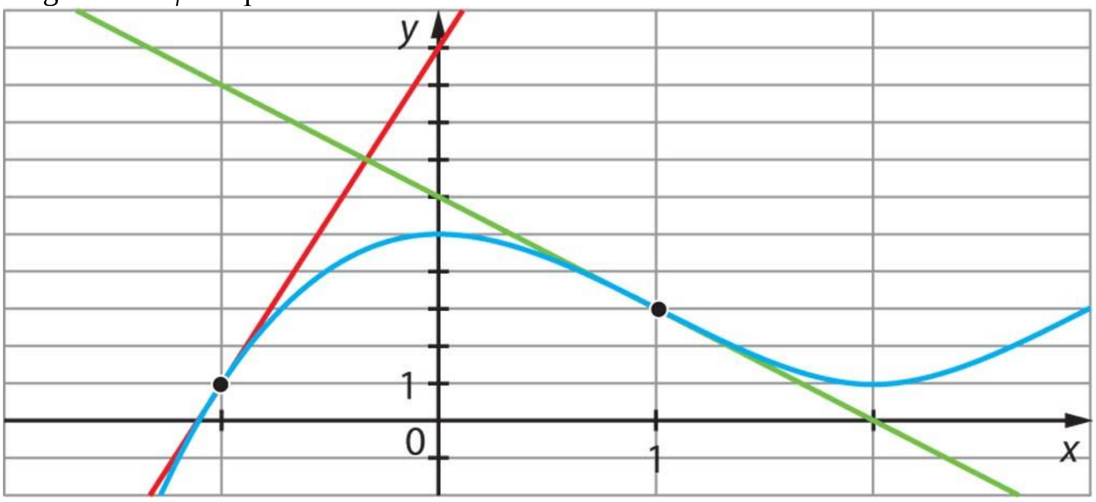
$x - - - - - \to \sqrt{-5x+2} = h(x)$ $\qquad h(x) = g(-5x+2)$

g est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\quad g'(X) = \frac{1}{2\sqrt{X}}$

h est donc dérivable sur $]-\infty;0,4[$

$$h'(x) = -5 \times g'(-5x+2) = -5\frac{1}{2\sqrt{-5x+2}} = \frac{-5}{2\sqrt{-5x+2}}$$

<u>Exercice supplémentaire :</u>
f est une fonction définie et dérivable sur **R**. Sa courbe représentative C_f ainsi que les tangentes à C_f aux points d'abscisses – 1 et 1 sont tracées ci-dessous.



g, *h* et *k* sont les fonctions définies sur **R** par :

$g(x) = f(-x)$, $h(x) = f(2x)$ et $k(x) = f(x-2)$.

1. Lire sur le graphique $f'(-1)$ et $f'(1)$.
2. Exprimer $g'(x)$, $h'(x)$ et $k'(x)$ en fonction de *x*.
3. En déduire $g'(-1)$, $g'(1)$, $h'(0,5)$ et $k'(1)$.

Correction :

1. $f'(-1) = \frac{\text{accroissement des ordonnées}}{\text{accroissement des abscisses}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{10-1}{0-(-1)} = 9$

$f'(1) = \frac{\text{accroissement des ordonnées}}{\text{accroissement des abscisses}} = \frac{0-3}{2-1} = -3$

2.pour tout réel x, $g'(x) = -f'(-x)$ $\quad$, $\quad h'(x) = 2f'(2x)$ $\quad$, $k'(x) = f'(x-2)$

3. $g'(-1) = -f'(1) = 3$ $\qquad g'(1) = -f'(-1) = -9$

$h'(0,5) = 2f'(1) = -6$ $\qquad k'(1) = f'(-1) = 9$

Exercices 84p123

84 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2 \times |x-2|$.

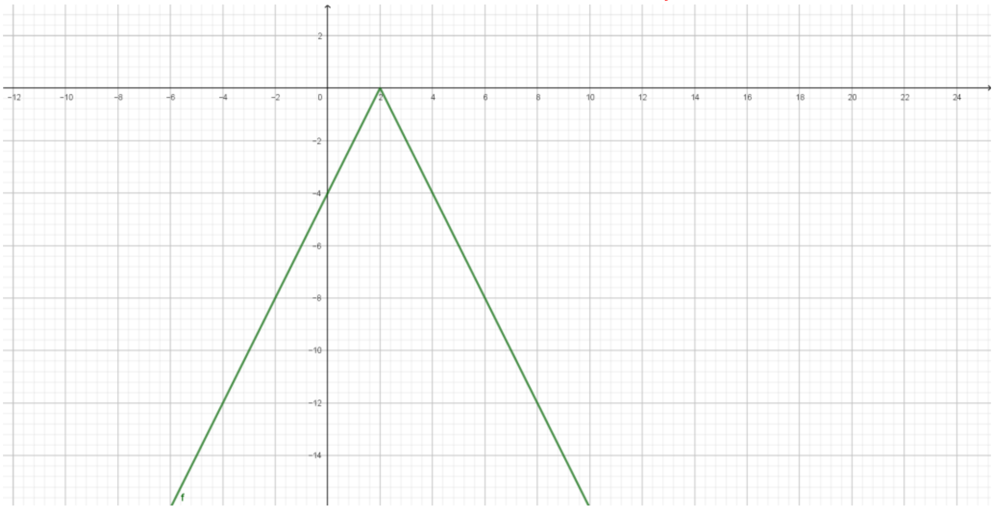
1. Exprimer $f(x)$ sans les symboles de la valeur absolue puis représenter la fonction f.

2. a. Déterminer $f'(x)$ pour $x \neq 2$.

b. Justifier que f n'est pas dérivable en 2.

Capacité 11, p. 115

1. Lorsque ≥ 2 , $x-2 \geq 0$ et $|x-2| = x-2$ et $f(x) = -2(x-2) = -2x+4$
2. Lorsque ≤ 2 , $x-2 \leq 0$ et $|x-2| = -(x-2) = -x+2$ et $f(x) = -2(-x+2) = 2x-4$



2.a)Lorsque $x > 2$, f est dérivable en x et $f'(x) = -2$

Lorsque $x < 2$, f est dérivable en x et $f'(x) = 2$.

b)On calcule le taux d'accroissement de la fonction f entre 2 et 2+h. $f(x) = -2\,|x-2|$

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{-2 \times |2+h-2| - (-2) \times |2-2|}{h} = \frac{-2 \times |h|}{h}$$

Si h>0, $\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{-2\times h}{h} = -2$

Si h<0, $\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{-2\times(-h)}{h} = 2$

$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ n'a pas de limite lorsque h se rapproche de 0. f n'est donc pas dérivable en 2.

Exercice 88p123

88 CALC Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, $\mathscr{C}$ sa courbe représentative et T la tangente à $\mathscr{C}$ en son point A d'abscisse 1.

1. Écrire une équation de la droite T.
2. Vérifier que, pour tout réel x, $x^3 - 3x^2 + 1 - (-3x + 2) = (x - 1)^3$.
3. a. Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à T.
b. Vérifier à l'aide d'une calculatrice.

1.f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynome. Pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f(1) = 1^3 - 3 \times 1^2 + 1 = -1$ $\quad f'(1) = 3 \times 1^2 - 6 \times 1 = -3$

Une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

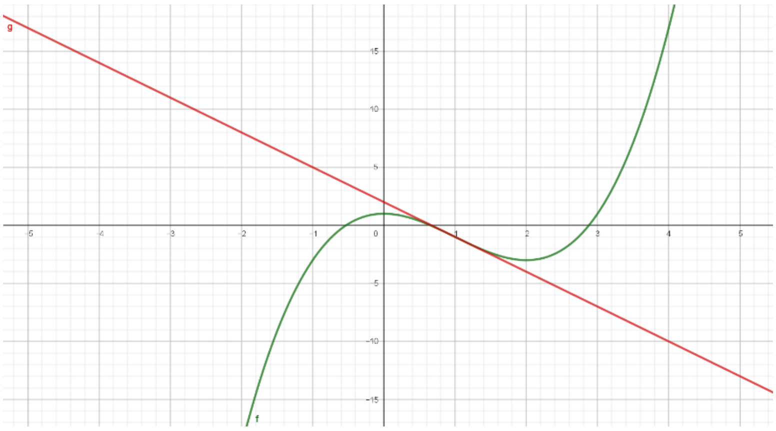
On remplace a par 1.

$y = f'(1)(x - 1) + f(1)$

$y = -3(x - 1) - 1$

$y = -3x + 3 - 1$

$y = -3x + 2$



2.Démontrons que pour tout réel x, $x^3 - 3x^2 + 1 - (-3x + 2) = (x - 1)^3$

$x^3 - 3x^2 + 1 - (-3x + 2) = x^3 - 3x^2 + 1 + 3x - 2$

$= x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

$(x - 1)^3 = (x - 1)(x - 1)^2 = (x - 1)(x^2 - 2x + 1)$

$= x^3 - 2x^2 + x - x^2 + 2x - 1$

$= x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

On en déduit que $x^3 - 3x^2 + 1 - (-3x + 2) = (x - 1)^3$

3.a)Pour étudier la position relative de C par rapport à T , on doit étudier le signe de

$$d(x) = f(x) - (-3x + 2) = (x - 1)^3 = (x - 1)(x - 1)^2$$

$x - 1 > 0$ est équivalent à $x > 1$ $\qquad (x - 1)^2 > 0$ sauf en 1 où elle s'annule

x	-∞	1	+∞
$x - 1$	-	0	+
$(x - 1)^2$	+	0	+
$d(x)$	-	0	+
Position relative	C est au-dessous de T	*	C est au dessus de T

*C et T sont sécants au point d'abscisse 1

Exercice 89p124

89 CALCULER RAISONNER

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I =]2\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x+4}{x-2}.$$

1. Calculer $f'(x)$.

2. a. Vérifier que, pour tout x de I, $f(x) = 2 + \frac{8}{x-2}$.

b. Calculer $f'(x)$ en utilisant cette expression.
Vérifier la cohérence avec la réponse apportée à la question **1.**.

3. a. Calculer le nombre dérivé de f en 3.

b. Montrer que la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ de f au point d'abscisse 3 a pour équation réduite $y = -8x + 34$.

4. a. Montrer que, pour tout réel x de $]2\,;+\infty[$,

$$f(x) - (-8x+34) = \frac{8\left(x^2 - 6x + 9\right)}{x-2}.$$

b. En déduire la position relative de T et $\mathscr{C}$ sur I.

1. f est **dérivable** sur $]2;+\infty[$ car de la forme $\frac{u}{v}$ où u et v sont dérivables sur $]2;+\infty[$.($v(x) \neq 0$)

Pour tout réel $x > 2$,

- $f = \frac{u}{v}$
- $u(x) = 2x + 4 \qquad u'(x) = 2$
  $v(x) = x - 2 \qquad v'(x) = 1$
- $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$f'(x) = \frac{2(x-2) - (2x+4)1}{(x-2)^2}$$
$$= \frac{2x - 4 - 2x - 4}{(x-2)^2}$$
$$= \frac{-8}{(x-2)^2}.$$

2.a) Démontrons que pour tout réel x de $]2;+\infty[$, $f(x) = 2 + \frac{8}{x-2}$

$2 + \frac{8}{x-2} = \frac{2(x-2)}{x-2} + \frac{8}{x-2} = \frac{2x-4+8}{x-2} = \frac{2x+4}{x-2} = f(x)$

b)

- $f = 2 + 8 \times \frac{1}{v}$
- $v(x) = x - 2 \qquad v'(x) = 1$
- $f' = 0 + 8 \times -\frac{v'}{v}$

$$f'(x) = -8 \times \frac{1}{(x-2)^2}$$
$$= \frac{-8}{(x-2)^2}.$$

3.a) $f'(3) = \frac{-8}{(3-2)^2} = -8 \qquad f(3) = \frac{2\times3+4}{3-2} = 10$

Une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

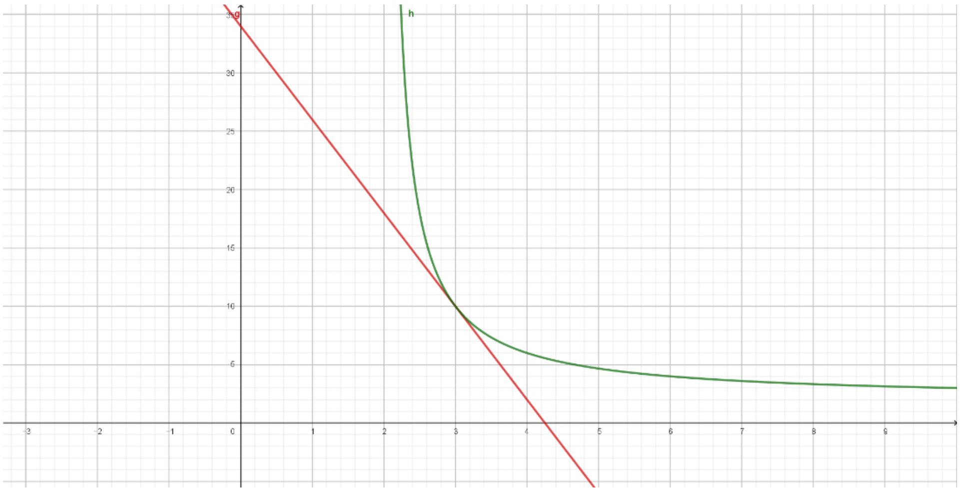
On remplace a par 3.

$y = f'(3)(x-3) + f(3)$

$y = -8(x-3) + 10$

$y = -8x + 24 + 10$

$y = -8x + 34$



4.a) Démontrons que pour tout réel x de $]2;+\infty[$, $f(x) - (-8x+34) = \frac{8(x^2-6x+9)}{x-2}$

$$f(x) - (-8x+34) = \frac{2x+4}{x-2} + 8x - 34$$

$$= \frac{2x+4}{x-2} + \frac{(8x-34)(x-2)}{x-2}$$

$$= \frac{2x+4}{x-2} + \frac{8x^2-16x-34x+68}{x-2}$$

$$= \frac{2x+4+8x^2-16x-34x+68}{x-2}$$

$$= \frac{8x^2-48x+72}{x-2}$$

$$= \frac{8(x^2-6x+9)}{x-2}$$

b)Pour étudier la position relative de C par rapport à T , on doit étudier le signe de

$$d(x) = f(x) - (-8x+34) = \frac{8(x^2-6x+9)}{x-2}$$

$x - 2 > 0$ est équivalent à $x > 2$

$Signe\ de\ :\ x^2 - 6x + 9 : a = 1, b = -6\ ,\ c = 9 \quad \Delta = \ ... = 0$

Le polynome $x^2 - 6x + 9$ admet une seule racine :3

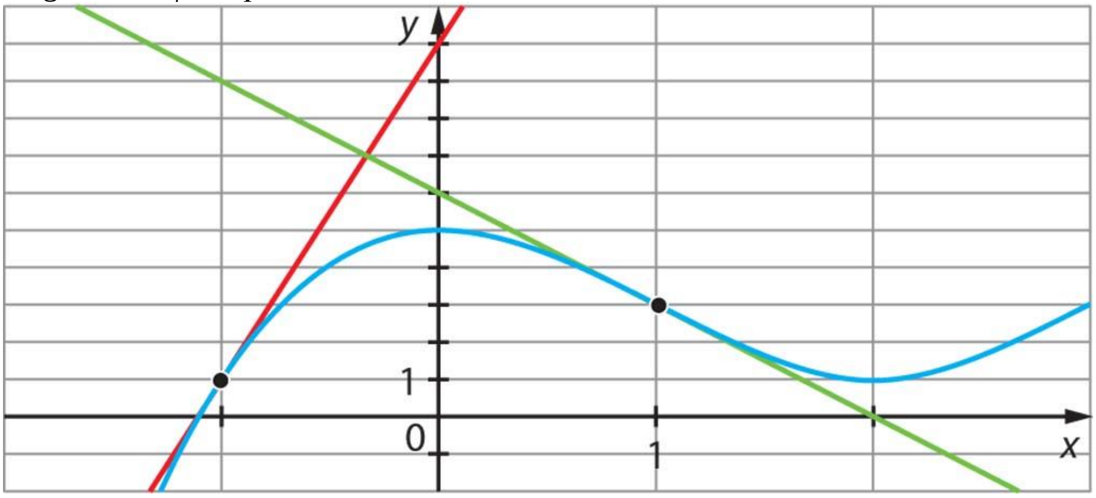
$x^2 - 6x + 9$ est du signe de a sauf en 3 où il s'annule

x	2		3		$+\infty$
$x-2$		+		+	
x^2-6x+9		+	0	+	
$d(x)$		+	0	+	
Position relative	C est au-dessus de T		*	C est au dessus de T	

*C et T sont sécants au point d'abscisse 3

Exercice supplémentaire :

f est une fonction définie et dérivable sur **R**. Sa courbe représentative C_f ainsi que les tangentes à C_f aux points d'abscisses – 1 et 1 sont tracées ci-dessous.



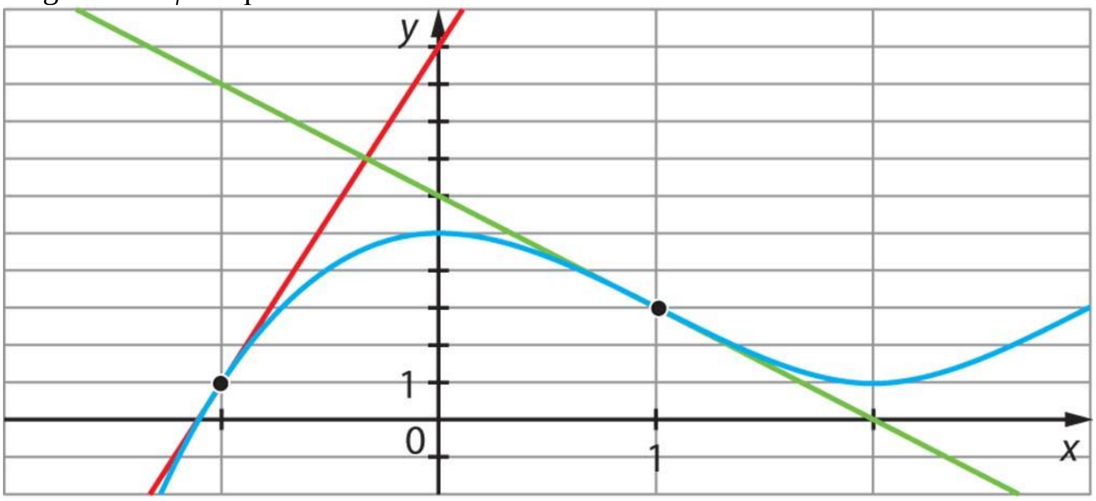
g, *h* et *k* sont les fonctions définies sur **R** par :

$$g(x) = f(-x),\ h(x) = f(2x) \text{ et } k(x) = f(x-2).$$

4. Lire sur le graphique $f'(-1)$ et $f'(1)$.
5. Exprimer $g'(x)$, $h'(x)$ et $k'(x)$ en fonction de x.
6. En déduire $g'(-1)$, $g'(1)$, $h'(0,5)$ et $k'(1)$.

Exercice supplémentaire :

f est une fonction définie et dérivable sur **R**. Sa courbe représentative C_f ainsi que les tangentes à C_f aux points d'abscisses – 1 et 1 sont tracées ci-dessous.



g, *h* et *k* sont les fonctions définies sur **R** par :

$$g(x) = f(-x),\ h(x) = f(2x) \text{ et } k(x) = f(x-2).$$

1. Lire sur le graphique $f'(-1)$ et $f'(1)$.
2. Exprimer $g'(x)$, $h'(x)$ et $k'(x)$ en fonction de x.
3. En déduire $g'(-1)$, $g'(1)$, $h'(0,5)$ et $k'(1)$.