Exercices 14,15,18,19p146 , 24p147,36,37p148

**14** La fonction $f$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ décroissante sur $]-\infty\,;5]$ et croissante sur $[5\,;+\infty[$.

**a.** Quel est le signe de la dérivée de $f$ sur $]-\infty\,;5]$ ?

**b.** Quel est le signe de la dérivée de $f$ sur $[5\,;+\infty[$ ?

**14**

**a.** $f'(x) \leq 0$ pour $x \in ]-\infty\,;5]$.

**b.** $f'(x) \geq 0$ pour $x \in [5\,;+\infty[$.

**15** La fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, croissante sur $]-\infty\,;-7]$ et décroissante sur $[-7\,;+\infty[$.

Recopier et compléter le tableau de signes de $f'(x)$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-7$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | … | 0 | … | |

**15**

| $x$ | $-\infty$ | | $-7$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | – | |

**18** On donne le tableau de variation d'une fonction $f$ dérivable sur $[-10\,;10]$.

| $x$ | $-10$ | | $0$ | | $5$ | | $10$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-5$ | $\nearrow$ | $-1$ | $\searrow$ | $-3$ | $\nearrow$ | $4$ |

Quel est le signe de la dérivée de la fonction $f$ sur :

**a.** $[-10\,;0]$ **b.** $[0\,;5]$ **c.** $[5\,;10]$

| $x$ | $-10$ | | $0$ | | $5$ | | $10$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-5$ | $\nearrow$ | $-1$ | $\searrow$ | $-3$ | $\nearrow$ | $4$ |
| $f'(x)$ | | + | 0 | - | 0 | + | |

**a.** $f'(x) \geq 0$ pour $x \in [-10\,;0]$.

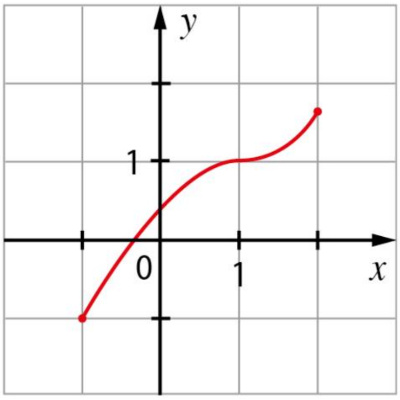
**b.** $f'(x) \leq 0$ pour $x \in [0\,;5]$.

**c.** $f'(x) \geq 0$ pour $x \in [5\,;10]$.

**19** Sur le graphique ci-contre est représentée une fonction $f$ dérivable sur $[-1\,;2]$.

**a.** Par lecture graphique, déterminer le sens de variation de $f$ sur $[-1\,;2]$.

**b.** Justifier que $f'(x)$ est positif sur $[-1\,;2]$.




**19**

**a.** $f$ est croissante sur $[-1\,;\,2]$.

**b.** Puisque $f$ est croissante sur $[-1\,;2]$, $f'(x) \geq 0$ sur $[-1\,;2]$.

**24** La fonction $f$ est dérivable sur $[0\,;\,2\,019]$ et telle que $f(0) = 33$, $f(1\,969) = -1$ et $f(2\,019) = 49$.

Recopier et compléter le tableau de variation de $f$.

| $x$ | $0$ | | $1\,969$ | | $2\,019$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | | | | |

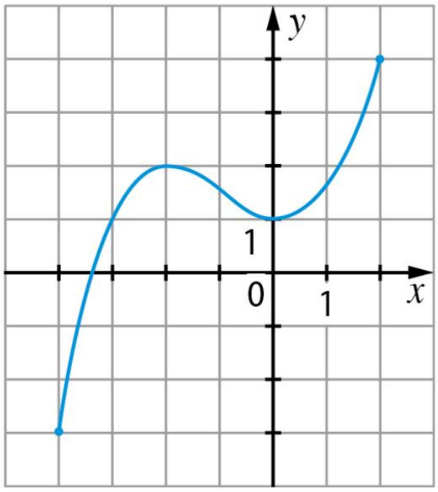
**24**

| $x$ | $0$ | | $1969$ | | $2019$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $33$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $49$ |

**36** Sur le graphique ci-contre est représentée une fonction $f$ dérivable sur l'intervalle [–4 ; 2].

**a.** Par lecture graphique, déterminer le sens de variation de la fonction $f$ sur [–4 ; 2].

**b.** Déterminer le signe de $f'(x)$ sur [–4 ; 2].




*Capacité 1, p. 141*

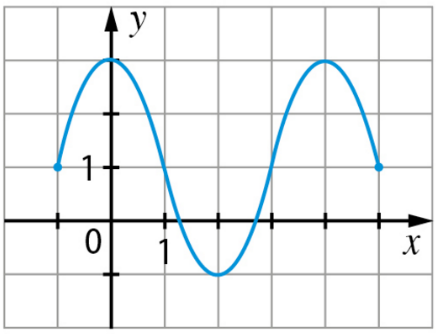
**36 a.** $f$ est croissante sur [–4 ; –2], décroissante sur [–2 ; 0] et croissante sur [0 ; 2].

**b.** $f'(x)$ est positif sur [–4 ; –2], négatif sur [–2 ; 0] et positif sur [0 ; 2].

**37** Sur le graphique ci-contre est représentée une fonction $f$ dérivable sur l'intervalle [–1 ; 5].

**a.** Par lecture graphique, déterminer le sens de variation de la fonction $f$ sur [–1 ; 5].

**b.** Déterminer le signe de $f'(x)$ sur [–1 ; 5].

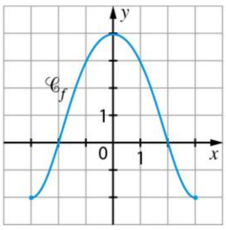



**37 a.** $f$ est croissante sur [–1 ; 0], décroissante sur [0 ; 2], croissante sur [2 ; 4] et décroissante sur [4 ; 5].

**b.** $f'(x)$ est positif sur [–1 ; 0], négatif sur [0 ; 2], positif sur [2 ; 4] et négatif sur [4 ; 5].

Exercices 38,40,41p148

**38** La courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction $f$ dérivable sur [–3 ; 3] est donnée ci-dessous.

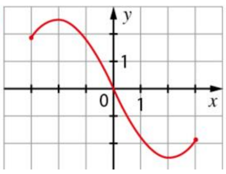



**a.** Par lecture graphique, déterminer le sens de variation de $f$ sur [–3 ; 3].

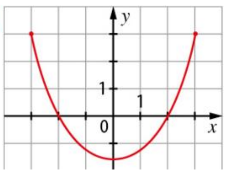
**b.** En déduire le signe de $f'(x)$ sur [–3 ; 3].

**c.** Une des deux courbes ci-dessous est la courbe représentative de la dérivée de la fonction. Laquelle ?

a




b



**38** **a. et b.**

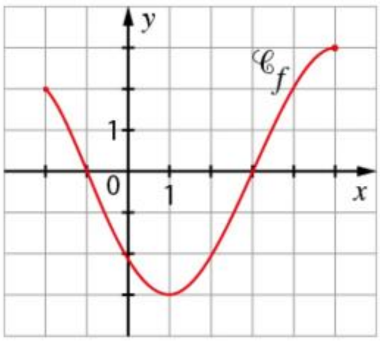
| $x$ | $-3$ | | $0$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-2$ | ↗ | $4$ | ↘ | $-2$ |

On cherche la courbe d'une fonction :

- Positive ou nulle sur [-3 ;0]
- Négative ou nulle sur [0 ;3]
- Qui s'annule en 0

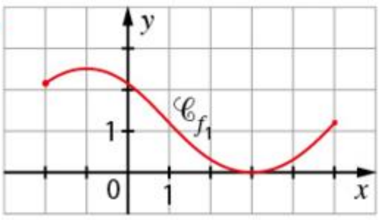
La courbe a répond à ces 3 critères.

**40** **1.** On donne ci-contre la courbe représentative d'une fonction $f$ dérivable sur $[-2 ; 5]$. Dresser le tableau de variation de $f$.

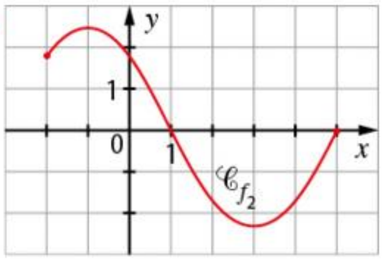



**2.** On donne ci-dessous les représentations graphiques de quatre fonctions $f_1, f_2, f_3$ et $f_4$. Déterminer, parmi ces courbes, celle de la fonction dérivée de la fonction $f$.

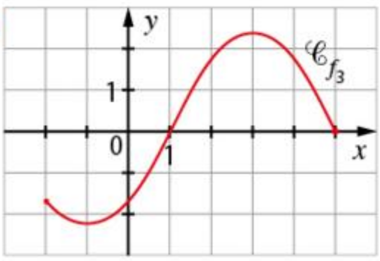
**a.**



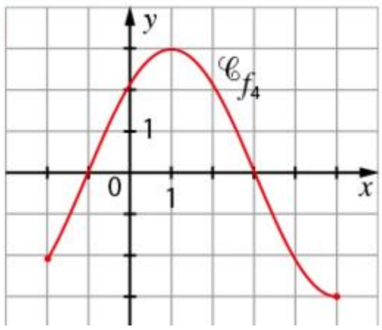

**b.**




**c.**




**d.**



**40** **1.** Le tableau de variations de $f$ est le suivant.

| $x$ | $-2$ | | $1$ | | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $2$ | ↘ | $-3$ | ↗ | $3$ |

**2.** On déduit le tableau de signes de $f'$ :

| $x$ | $-2$ | | $1$ | | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

On dresse les tableaux de signes des autres dérivées :

| $x$ | $-2$ | | $3$ | | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_1'(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |

| $x$ | $-2$ | | $1$ | | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_2'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ |

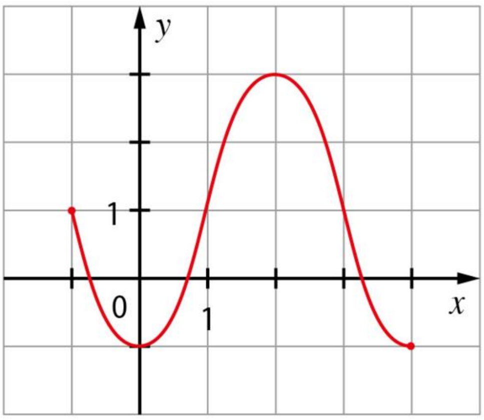
| $x$ | $-2$ | | $1$ | | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_3'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

| $x$ | $-2$ | | $1$ | | $3$ | | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_4'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

Seul le tableau de $f'_3$ correspond, donc $f' = f_3$.

## 41 ORAL Vrai ou Faux ?

Sur le graphique ci-contre est représentée une fonction $f$ définie et dérivable sur $[-1 ; 4]$.




*Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.*

**a.** $f'(3) > 0$.

**b.** $f'(x) \leqslant 0$ sur l'intervalle $[-1 ; 0]$.

**c.** $f'(x) \geqslant 0$ pour tout réel $x$ de l'intervalle $[0 ; 2]$.

**41**

**a.** Faux, puisque $f$ est décroissante sur $[2 ; 4]$ donc $f'(x) \leq 0$ sur $[2 ; 4]$.

**b.** Vraie, puisque $f$ est décroissante sur $[-1 ; 0]$.

**c.** Vraie, puisque $f$ est croissante sur $[0 ; 2]$.

Exercices 43,44,45,49,50,51,55p149

**43** CALC La fonction $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^2 + 8x - 10.$$

**a.** Calculer $f'(x)$.

**b.** Déterminer le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

**c.** Étudier les variations de $f$ sur $\mathbb{R}$ et construire son tableau de variation.

**d.** Vérifier la cohérence du résultat précédent avec le graphique affiché par la calculatrice.

*Capacité 2, p. 141*

a)f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme.

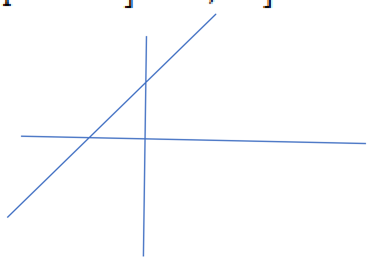
Pour tout réel $x$ , $f'(x) = 4x + 8$.

$4x + 8 > 0$ équivaut à $4x > -8$ équivaut à $x > -2$

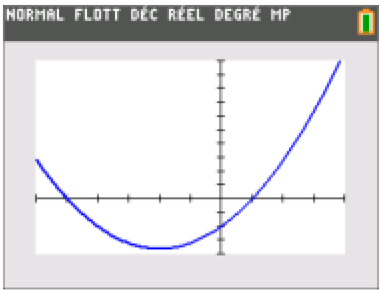
**b.** $f'(x) \geq 0$ pour $x \in [-2\,;+\infty[$ et $f'(x) \leq 0$ pour $x \in ]-\infty\,;-2]$.

**c.** $f$ est croissante pour $x \in [-2\,;+\infty[$ et $f$ est décroissante pour $x \in ]-\infty\,;-2]$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | - | 0 | + | |
| $f(x)$ | | ↘ | $-18$ | ↗ | |



**d.**




**44** CALC La fonction $f$ est définie sur $[0\,;10]$ par :

$$f(x) = -x^3 + 12x^2 - 36x - 24.$$

**a.** $f'(x)$ est un polynôme du second degré. Vérifier que ses racines sont 2 et 6.

**b.** Étudier le sens de variation de $f$ sur $[0\,;10]$ et dresser son tableau de variation.

**c.** À l'aide de la calculatrice, vérifier le résultat précédent.

a)f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme.

Pour tout réel $x$ , $f'(x) = -3x^2 + 24x - 36$.

$a = -3 \quad b = 24 \quad c = -36$ .

On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 144$

$\Delta > 0$ . Il y a donc deux racines distinctes. $x_1 = \frac{-24-\sqrt{144}}{2\times(-3)} = 6$ et $x_2 = \frac{-24+\sqrt{144}}{2\times(-3)} = 2$

Vérification :

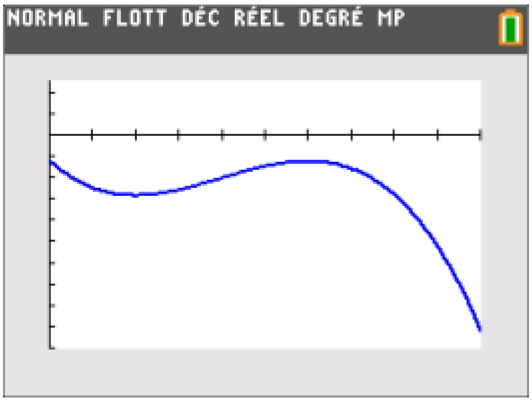
$$f'(2) = -12 + 48 - 36 = 0$$
$$f'(6) = -108 + 144 - 36 = 0$$

b)f' est une fonction du second degré donc du signe de a=-3 à l'extérieur des racines :2 et 6.

**b.** $f$ est décroissante pour sur $[0 ; 2]$ et sur$[6 ; 10]$ et $f$ est croissante sur $[2 ; 6]$.

| $x$ | 0 | | 2 | | 6 | | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | − | 0 | + | 0 | − | |
| $f(x)$ | −24 | ↘ | −56 | ↗ | −24 | ↘ | −184 |

**c.**




**45** La fonction $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x$.

**a.** Calculer la dérivée de $f$ et déterminer son signe.

**b.** En déduire le sens de variation de $f$ sur $\mathbb{R}$.

a)b)f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme.

Pour tout réel , $f'(x) = 3x^2 - 3$ $\quad (= 3(x^2 - 1) = 3(x^2 - 1^2) = 3(x - 1)(x + 1))$

$a = 3 \quad b = 0 \quad c = -3$ .

On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 36$

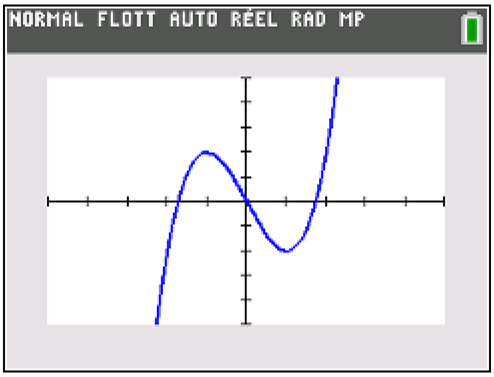
$\Delta > 0$ . Il y a donc deux racines distinctes. $x_1 = \frac{-0-\sqrt{36}}{2\times3} = -1$ et $x_2 = \frac{-0+\sqrt{36}}{2\times3} = 1$

f' est une fonction du second degré donc du signe de a=3 à l'extérieur des racines :-1 et 1.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | - | 0 | + | |
| $f(x)$ | | ↗ | 2 | ↘ | -2 | ↗ | |

f(-1)=(-1)$^3$-3×(-1)=-1+3=2      f(1)=1$^3$-3×1=1-3=-2

f est croissante sur ]-∞ ;-1] et [1 ;+∞[    et décroissante sur [-1 ;1]




**Pour les exercices 47 à 51, déterminer la fonction dérivée $f'$ de chaque fonction $f$ définie sur l'intervalle I, étudier son signe puis déterminer le sens de variation de $f$ sur I.**

**47** **a.** $f(x) = x^3 - 1{,}5x^2 - 6x + 2\,019$ où I = $\mathbb{R}$
**b.** $f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x - 2\,020$ où I = $\mathbb{R}$

**48** **a.** $f(x) = 1 + \frac{2}{x}$ où I = $]0\,;+\infty[$

**b.** $f(x) = 3 - \frac{5}{x}$ où I = $]0\,;+\infty[$

**49** **a.** $f(x) = \frac{3x+5}{x-2}$ où I = $]2\,;+\infty[$

**b.** $f(x) = \frac{4x-7}{2x-2}$ où I = $]1\,;+\infty[$

**50** **a.** $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ où I = $\mathbb{R} \setminus \{-1\,;1\}$

**b.** $f(x) = \frac{x}{x^2+3}$ où I = $\mathbb{R}$

**51** **a.** $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2+3x+3}$ où I = $\mathbb{R}$

**b.** $f(x) = \frac{3x^2-1}{2x^2+x}$ où I = $\mathbb{R} \setminus \{-0{,}5\,;0\}$

49p149a)

f est **dérivable** sur $]2;+\infty[$ car de la forme $\frac{u}{v}$ où $u$ et $v$ sont dérivables sur $]2;+\infty[$.( $v(x) \neq 0$)

Pour tout réel $x > 2$,

- $f = \frac{u}{v}$
- $u(x) = 3x + 5 \qquad u'(x) = 3$
  $v(x) = x - 2 \qquad v'(x) = 1$
- $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

  $f'(x) = \frac{3(x-2)-(3x+5)1}{(x-2)^2} = \frac{3x-6-3x-5}{(x-2)^2} = \frac{-11}{(x-2)^2}$

  $-11 < 0$

  De plus , $(x-2)^2 > 0$

On en déduit que $\frac{-11}{(x-2)^2} < 0$.

| $x$ | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $\|\|$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $\|\|$ | $\searrow$ | |

**b.** $f'(x) = \frac{6}{(2x-2)^2}$

| $x$ | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $\|\|$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $\|\|$ | $\nearrow$ | |

50p149a)

f est **dérivable** sur $]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$ car de la forme $\frac{1}{v}$ où $v$ est dérivable sur $]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$ .( $v(x) \neq 0$)

Pour tout réel $x \neq -1$ et 1

- $f = \frac{1}{v}$
- $v(x) = x^2 - 1 \qquad v'(x) = 2x$
- $f' = \frac{-v'}{v^2}$

  $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$

  $(x^2-1)^2 > 0$. $f'(x)$ est donc du signe de $-2x$.

  $-2x > 0$ *équivaut* à $x < 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $\|\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\|\|$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | $\|\|$ | $\nearrow$ | $-1$ | $\searrow$ | $\|\|$ | $\searrow$ | |

b)f est **dérivable** sur$\mathbb{R}$ car de la forme $\frac{u}{v}$ où $u$ et $v$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$.( $v(x) \neq 0$)

Pour tout réel $x$,

- $f = \frac{u}{v}$
- $u(x) = x \qquad u'(x) = 1$

  $v(x) = x^2 + 3 \qquad v'(x) = 2x$
- $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

  $f'(x) = \frac{1(x^2+3) - x(2x)}{(x^2+3)^2} = \frac{x^2+3-2x^2}{(x^2+3)^2} = \frac{-x^2+3}{(x^2+3)^2}$

  $(x^2+3)^2 > 0$. $f'(x)$ est donc du signe de $-x^2+3$.

  (polynôme du second degré dont les racines sont $\sqrt{3}$ et -$\sqrt{3}$)

| $x$ | $-\infty$ | | $-\sqrt{3}$ | | $\sqrt{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | $-\frac{\sqrt{3}}{6}$ | $\nearrow$ | $\frac{\sqrt{3}}{6}$ | $\searrow$ | |

Ex51

a)$f$ est **dérivable** sur$\mathbb{R}$ car de la forme $\frac{u}{v}$ où $u$ et $v$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$(\, v(x) \neq 0 \quad car\ \Delta = -3 < 0\ et \quad v\ toujours\ du\ signe\ de\ a = 1)$$

Pour tout réel $x$,

- $f = \frac{u}{v}$
- $u(x) = x^2 + x + 1 \qquad u'(x) = 2x + 1$
  $v(x) = x^2 + 3x + 3 \qquad v'(x) = 2x + 3$
- $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

  $f'(x) = \frac{(2x+1)(x^2+3x+3)-(x^2+x+1)(2x+3)}{(x^2+3x+3)^2}$
  $= \frac{2x^3+6x^2+6x+x^2+3x+3-(2x^3+3x^2+2x^2+3x+2x+3)}{(x^2+3x+3)^2}$
  $= \frac{2x^3+7x^2+9x+3-(2x^3+5x^2+5x+3)}{(x^2+3x+3)^2}$
  $= \frac{2x^3+7x^2+9x+3-2x^3-5x^2-5x-3}{(x^2+3x+3)^2}$
  $= \frac{2x^2+4x}{(x^2+3x+3)^2}$
  $= \frac{2x(x+2)}{(x^2+3x+3)^2} \qquad 2x^2 + 4x = 2x \times x + 2x \times 2 = 2x(x+2)$

  $(x^2 + 3x + 3)^2 > 0$. $f'(x)$ est donc du signe de $2x(x + 2)$.
  (polynôme du second degré dont les racines sont $0$ et $-2$ et dont le coefficient $a = 2$)

  $f'$ est du signe de a=2 à l'extérieur des racines

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $\frac{1}{3}$ | $\nearrow$ | |

$f$ est croissante sur ]-∞ ;-2] et [0 ;+∞[ et décroissante sur [-2 ;0].
b)$f$ est **dérivable** sur$\mathbb{R}$\{-0,5 ;0} car de la forme $\frac{u}{v}$ où $u$ et $v$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$.( $v(x) \neq 0$ )

Pour tout réel $x \neq -0{,}5\ et\ 0$,

- $f = \frac{u}{v}$
- $u(x) = 3x^2 - 1 \qquad u'(x) = 6x$
  $v(x) = 2x^2 + x \qquad v'(x) = 4x + 1$
- $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$f'(x) = \frac{6x(2x^2+x)-(3x^2-1)(4x+1)}{(2x^2+x)^2}$$
$$= \frac{12x^3+6x^2-(12x^3+3x^2-4x-1)}{(2x^2+x)^2}$$

$$= \frac{12x^3+6x^2-12x^3-3x^2+4x+1}{(2x^2+x)^2}$$

$$= \frac{3x^2+4x+1}{(2x^2+x)^2}$$

$(2x^2+x)^2 > 0.$ $f'(x)$ est donc du signe de $3x^2+4x+1$

$a = 3 \quad b = 4 \quad c = 1$ .

On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 4$

$\Delta > 0$ . Il y a donc deux racines distinctes. $x_1 = \frac{-4-\sqrt{4}}{2\times 3} = -1$ et $x_2 = \frac{-4+\sqrt{4}}{2\times 3} = -\frac{1}{3}$

f' est une fonction du second degré donc du signe de a=3 à l'extérieur des racines :-1 et $-\frac{1}{3}$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $-0{,}5$ | | $-1/3$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | ‖ | − | 0 | + | ‖ | + | |
| $f(x)$ | | ↗ | 3 | ↘ | ‖ | ↘ | $\frac{1}{3}$ | ↗ | ‖ | ↗ | |

$f$ est croissante sur ]-∞ ;-1] , [ $-\frac{1}{3}$;0[ et [0 ;+∞[ et décroissante sur [-1 ;-0,5[ et ]-0,5 ; $-\frac{1}{3}$].

**55** FORMEL La fonction $f$ est définie sur l'intervalle [2 ; 6] par $f(x) = \frac{x^2+7x+1}{x-1}$.

À l'aide d'un logiciel de calcul formel, Valentin a obtenu l'affichage suivant.

```
1 factoriser(deriver((x^2+7x+1)/(x-1)))
```

$$\frac{(x-4)*(x+2)}{(x-1)^2}$$

**a.** Vérifier le résultat affiché.

**b.** Dresser le tableau de variation de $f$.

Ex55

a)$f$ est **dérivable** sur$[2; 6]$ car de la forme $\frac{u}{v}$ où $u$ et $v$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$.( $v(x) \neq 0 \quad sur\ [2; 6]$)

Pour tout réel $x\ de\ [2; 6]$,

- $f=\frac{u}{v}$
- $u(x) = x^2 + 7x + 1 \qquad u'(x) = 2x + 7$
  $v(x) = x - 1 \qquad v'(x) = 1$
- $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$f'(x) = \frac{(2x+7)(x-1)-(x^2+7x+1)(1)}{(x-1)^2}$

$= \frac{2x^2-2x+7x-7-x^2-7x-1}{(x-1)^2}$

$= \frac{x^2-2x-8}{(x-1)^2}$

Or $(x-4)(x+2) = x^2 + 2x - 4x - 8 = x^2 - 2x - 8$

$f'(x) = \frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2}$

b) $(x-1)^2 > 0$. $f'(x)$ est donc du signe de $(x-4)(x+2)$.
(polynôme du second degré dont les racines sont 4 et $-2$ et dont le coefficient $a = 1$)

| $x$ | 2 | | 4 | | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | 0 | − | 0 | + | |
| $f(x)$ | 19 | ↘ | 15 | ↗ | $\frac{79}{5}$ |

$f$ est décroissante sur [2 ;4] et croissante sur [4 ;6]

Exercices 65,67,68p150-151 , 82,85, sujet Bp161

**65** On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle [–1 ; 4] par $f(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 5$.

**a.** Calculer $f'(x)$ puis déterminer son signe.

**b.** Déterminer les extremums (éventuellement locaux) de $f$ sur [–1 ; 4].

**c.** Que peut-on dire des tangentes à la courbe représentative de $f$ aux points d'abscisses $-\frac{1}{3}$ et 3 ?

*Capacité 3, p. 143*

a)f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme.

Pour tout réel $x$ , $f'(x) = 3x^2 - 8x - 3$.

$a = 3 \quad b = -8 \quad c = -3$ .

On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 100$

$\Delta > 0$ . Il y a donc deux racines distinctes. $x_1 = \frac{8-\sqrt{100}}{2\times3} = -\frac{1}{3}$ et $x_2 = \frac{8+\sqrt{100}}{2\times3} = 3$

| $x$ | -1 | | $-\frac{1}{3}$ | | 3 | | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | - | 0 | + | |
| $f(x)$ | 3 | ↗ | $\frac{149}{27}$ | ↘ | -13 | ↗ | -7 |

b) f admet un maximum local et même global en $-\frac{1}{3}$ de valeur $\frac{149}{27}$ (f' s'annule et change de signe en $-\frac{1}{3}$)

f admet un minimum local et même global en 3 de valeur $-13$. (f' s'annule et change de signe en 3)

**c.** Les tangentes en ces points sont horizontales.

**67** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{4x+7}{x^2+2}$.

**a.** Étudier le sens de variation de $f$ sur l'intervalle [–5 ; 1].

**b.** Quel est le minimum de $f$ sur [–5 ; 1] ? Pour quelle valeur est-il atteint ?

**c.** Quel est le maximum de $f$ sur [–5 ; 1] ? Pour quelle valeur est-il atteint ?

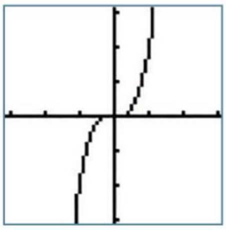
**67** *Le corrigé détaillé de cet exercice est disponible dans le manuel numérique enseignant, le manuel numérique élève et le site élève lycee.editions-bordas.fr.*

**a.** $f'(x) = \dfrac{4(x^2+2) - 2x(4x+7)}{(x^2+2)^2} = \dfrac{4x^2+8-8x^2-14x}{(x^2+2)^2} = \dfrac{-4x^2-14x+8}{(x^2+2)^2}$

| $x$ | –5 | | –4 | | 0,5 | | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-\frac{13}{27}$ | ↘ | $-\frac{1}{2}$ | ↗ | 4 | ↘ | $\frac{11}{3}$ |

**b.** $f$ a un minimum en –4 égal à –0,5.
**c.** $f$ a un maximum en 0,5 égal à 4.

**68** CALC Célestine a utilisé sa calculatrice pour représenter la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 0{,}06x$ et elle a obtenu le résultat ci-contre.



**1.** Célestine conclut que la fonction est strictement croissante. Que peut-on en penser ?

**2. a.** Calculer $f'(x)$ et étudier le sens de variation de $f$ sur $\mathbb{R}$.

**b.** Confirmer ou infirmer la conclusion de Célestine.

**3. a.** Déterminer les extremums locaux de $f$ sur $\mathbb{R}$.

**b.** En utilisant la question **3. a.**, déterminer une fenêtre permettant de voir sur l'écran de la calculatrice une représentation graphique de $f$ conforme à l'étude de son sens de variation.

**c.** Afficher cette représentation graphique sur la calculatrice.

**68**

**1.** D'après le graphique, on peut penser que Célestine a raison.

**2. a.** $f'(x) = 6x^2 - 0{,}06$

**b.**

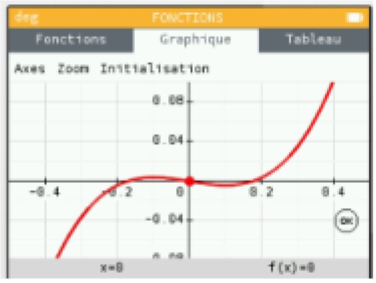
| $x$ | $-\infty$ | | $-0{,}1$ | | $0{,}1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↗ | | ↘ | | ↗ | |

On peut infirmer la conclusion de Célestine.

**3. a.** $f(-0{,}1) = -0{,}008$ et $f(0{,}1) = -0{,}004$.

**b.** $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ et $-0{,}1 \leq y = 0{,}1$

**c.**




Exercices 71,72,75,78,79p151 , sujet Cp161

**71** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + 2x - 3.$$

**a.** Montrer que $f$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

**b.** Vérifier que $f(1) = 0$. En déduire le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

**c.** Montrer que, pour tout $x \geqslant 1$, on a $x^3 \geqslant 3 - 2x$.

*Capacité 4, p. 143*

**72** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^3 + 3x + 18.$$

**1.** Étudier le sens de variation de $f$.

**2.** Déterminer le signe de $f$ sur $]-\infty\,;1]$, puis calculer $f(3)$.

**3. a.** Déterminer le signe de $f(x)$ sur $[1\,;+\infty[$.

**b.** Pour quelles valeurs de $x$ a-t-on $x^3 \leqslant 3x + 18$ ?

1.$f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme.

Pour tout réel $x$, $f'(x) = -3x^2 + 3$ $\quad (= -3(x^2 - 1) = -3(x^2 - 1^2) = -3(x-1)(x+1))$

$f'(x)$ est du signe de $a = -3$ à l'extérieur des racines :-1 et 1.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | $16$ | $\nearrow$ | $20$ | $\searrow$ | |

$f$ est décroissante sur $]-\infty\,;-1]$ $et$ $[1\,;+\infty[$ et croissante sur $[-1\,;1]$.

2.sur $]-\infty\,;1]$ , $f$ admet un minimum local en -1 de valeur 16>0.

Sur cet intervalle , la fonction $f$ est donc strictement positive.

$f(3) = (-3)^3 + 3 \times 3 + 18 = -27 + 9 + 18 = 0$

3a)

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $\searrow$ | $16$ | $\nearrow$ | $20$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | |
| $f(x)$ | | | | $+$ | | | $0$ | $-$ | |

$f$ est positive ou nulle sur ]-∞ ;3], négative ou nulle sur [3 ;+∞[ et s'annule en 3

**75** La fonction $f$ est définie sur l'intervalle $I = [0\,;10]$ par :

$$f(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x.$$

**a.** Étudier les variations de $f$ sur I.

**b.** Montrer que, pour tout réel $x$ de I, on a $f(x) \geqslant 0$.

**c.** En déduire le sens de variation de la fonction $g$ définie sur I par $g(x) = x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 57$.

**d.** Déterminer les extremums de $g$ sur I.

a.$f$ est dérivable sur $[0; 10]$ en tant que fonction polynôme.

Pour tout réel $x$ de [0 ;10], $f'(x) = 12x^2 - 96x + 144$

$a = 12 \quad b = -96 \quad c = 144$ .

On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 2304$

$\Delta > 0$ . Il y a deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-96)-\sqrt{2304}}{24} = 6$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-96)+\sqrt{2304}}{24} = 2$$

$f'$ est donc du signe de $a = 12$ à l'extérieur des racines.

| $x$ | 0 | | 2 | | 6 | | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | - | 0 | + | |
| $f(x)$ | 0 | ↗ | 128 | ↘ | 0 | ↗ | 640 |

$f$ est croissante sur [0 ;2] et [6 ;10]
$f$ est décroissante sur [2 ;6]

b)

| $x$ | 0 | | 2 | | 6 | | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | - | 0 | + | |
| $f(x)$ | 0 | ↗ | 128 | ↘ | 0 | ↗ | 640 |
| $f(x)$ | 0 | | + | | 0 | + | |

On en déduit que pour tout réel $x$ de I , $f(x) \geq 0$.

c. $g$ est dérivable sur $[0; 10]$ en tant que fonction polynôme.

Pour tout réel $x$ de [0 ;10], $g'(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x = f(x)$

| $x$ | 0 | | 6 | | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | 0 | + | 0 | + | |
| $g(x)$ | -57 | ↗ | 0 | ↗ | 1143 |

g est croisssante sur [0 ;10]

$g$ atteint ses extremums en 0 et 10 : $g(0) = -57$ et $g(10) = 1\,143$.

**78** La fonction $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$.
$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de $f$ dans un repère et $T$ est la tangente à $\mathscr{C}$ en 1.

**1.** Déterminer une équation de $T$.

**2.** On considère la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - (4x - 4)$.

**a.** Étudier les variations de $g$.

**b.** Calculer $g(-3)$.

**c.** Dresser le tableau de variation de $g$.

**d.** Déterminer le signe de $g(x)$ en fonction de $x$.

**3.** En déduire la position relative de $T$ par rapport à $\mathscr{C}$.

1.$f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme.

Pour tout réel $x$, $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$

Une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $a$ est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

$f(1) = 0$ $\quad\quad\quad\quad$ $f'(1) = 4$

$T : y = f'(1)(x - 1) + f(1)$

$= 4(x - 1) + 0$

$= 4x - 4$

2.a) $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme.

Pour tout réel $x$, $g'(x) = f'(x) - 4 = 3x^2 + 2x - 5$

$a = 3 \quad b = 2 \quad c = -5$ .

On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 64$

$\Delta > 0$ . Il y a donc deux racines distinctes. $x_1 = -\frac{5}{3}$ et $x_2 = 1$

$g'$ est du signe de $a = 3$ à l'extérieur des racines :1 et $-\frac{5}{3}$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{5}{3}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | + | 0 | – | 0 | + | |
| $g(x)$ | | ↗ | 257/27 | ↘ | 0 | ↗ | |

$g$ est croissante sur $]-\infty ;-\frac{5}{3}]$ et $[1 ;+\infty[$

$f$ est décroissante sur $[-\frac{5}{3} ;1]$

b) $g(-3) = 0$

c)d)

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $-\frac{5}{3}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | ↗ | $0$ | ↗ | | ↘ | $0$ | ↗ | |
| $g(x)$ | | - | $0$ | + | | + | $0$ | + | |

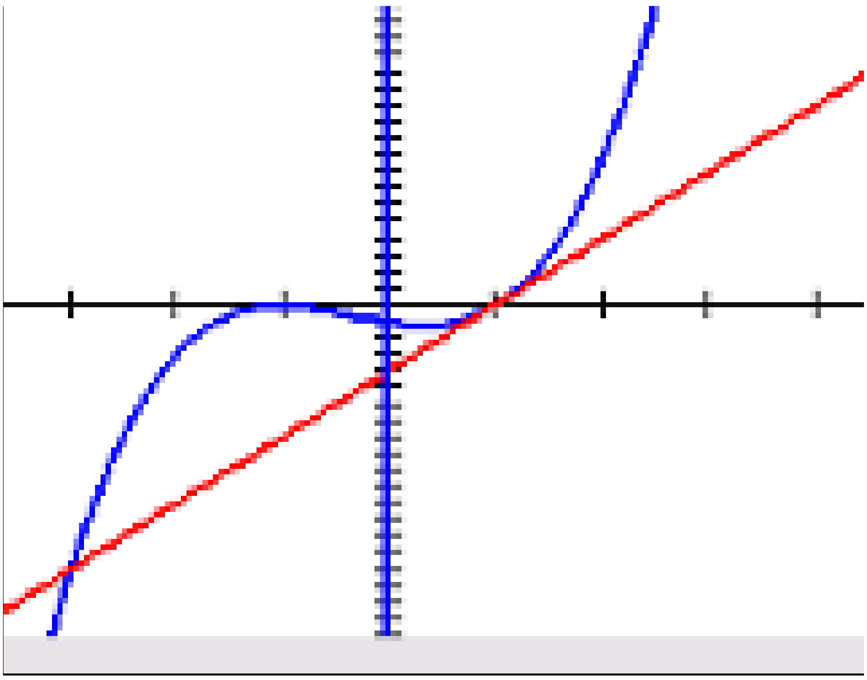
$g$ est positive ou nulle sur [-3 ;+∞[ , négative ou nulle sur]-∞ ;-3] et s’annule en -3 et 1

3.

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | - | $0$ | + | $0$ | + | |
| *Position relative de C par rapport à T* | | *Cest au-dessous de T* | | *C est au dessus de T* | | *C est au dessus de T* | |

Les courbes C et T sont sécantes aux points d’abscisse -3 et 1

Vérification :



**79** La fonction $f$ est définie sur l'intervalle $[-2\,;6]$ par :
$$f(x) = 0{,}5x^3 - 3x^2 + 8.$$
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.

**1. a.** Calculer $f'(x)$.

**b.** Étudier le sens de variation de $f$ et construire son tableau de variation sur $[-2\,;6]$.

**c.** Déterminer une équation de la tangente $T$ au point d'abscisse 2 de la courbe $\mathscr{C}$.

**2.** Soit $g$ la fonction définie sur $[-2\,;6]$ par $g(x) = f(x) - (-6x + 12)$.

**a.** Justifier que $g$ est croissante sur $[-2\,;6]$.

**b.** Calculer $g(2)$.

**c.** En déduire le signe de $g(x)$ sur $[-2\,;6]$.

**3.** Sur quel intervalle a-t-on $f(x) \geqslant -6x + 12$ ? Qu'en déduit-on pour la courbe $\mathscr{C}$ et pour la tangente $T$ ?

**4.** Construire la courbe $\mathscr{C}$, la tangente $T$ et les tangentes à $\mathscr{C}$ aux points d'abscisse 0 et 4.

***Capacité 5,*** *p. 144*

## Sujet C *25 min* CHERCHER CALCULER

***CAPACITÉS MISES EN ŒUVRE***
- *Étudier les variations d'une fonction*
- *Déterminer la position relative de deux courbes*

On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[-2\,;3]$ par $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x + 15$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

**1.** Déterminer la dérivée de $f$.

**2.** Déterminer une équation de la tangente $T$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 de $\mathscr{C}$.

**3.** On s'intéresse à la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la tangente $T$. On considère la fonction $g$ définie sur $[-2\,;3]$ par $g(x) = f(x) - (12x + 16)$.

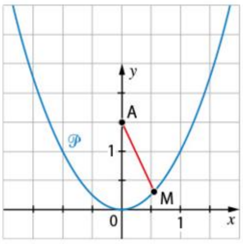
**a.** Étudier le sens de variation de $g$ sur $[-2\,;3]$ et calculer $g(-0{,}5)$.

**b.** En déduire le signe de $g$ sur $[-2\,;3]$.

**c.** Déterminer la position de $T$ par rapport à $\mathscr{C}$ sur $[-2\,;3]$.

## TP1 GÉOMÉTRIE Optimisation d'une distance

CHERCHER CALCULER




Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2$ et le point A de coordonnées $(0 ; 1{,}5)$.

### A Construction et animation de la figure

1. En utilisant un logiciel de géométrie dynamique, construire la parabole $\mathcal{P}$ et le point A.
2. Construire un point M sur la parabole $\mathcal{P}$ et faire afficher la distance du point A au point M.
3. a. Déplacer le point M et observer l'évolution de la distance AM.
b. Semble-t-il exister une ou des positions du point M pour laquelle (ou lesquelles) la distance AM est minimale ? Si oui, donner une valeur approchée de la distance minimale.
4. a. Tracer la tangente $T$ à $\mathcal{P}$ en M.
b. Que peut-on conjecturer sur la position de la tangente $T$ et de la droite (AM) lorsque la distance AM est minimale ?

### B Recherche de la valeur exacte du minimum de la distance AM

On appelle $x$ l'abscisse du point M.

1. Exprimer la distance AM en fonction de $x$.
2. On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 2{,}25.$$
a. Étudier les variations de la fonction $f$.
b. Déterminer le minimum de $f$ sur $\mathbb{R}$.
3. a. Vérifier que $\text{AM} = \sqrt{f(x)}$, puis en utilisant la croissance de la fonction racine carrée, montrer que le minimum de la distance AM est égal à $\sqrt{1{,}25}$.
b. Préciser les coordonnées des points M pour lesquels la distance AM est égale à ce minimum.
4. On s'intéresse au point $M_0$ de $P$ d'abscisse 1.
a. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ en $M_0$.
b. Calculer les coordonnées du point d'intersection B de $T$ et de l'axe des ordonnées.
c. Montrer que le triangle $ABM_0$ est rectangle.
d. Prouver la conjecture émise à la question 4.b de la partie A.

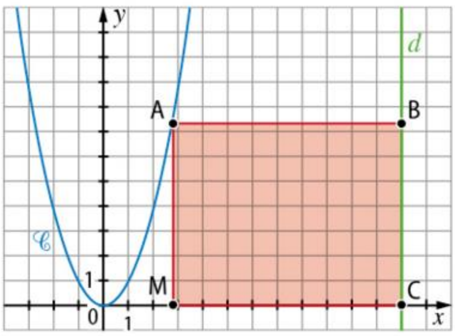
### Chercher en autonomie

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $I = ]-1 ; 1]$ par $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x + 1}$.

a. Pour tout réel $x$ de I, calculer $f'(x)$.
b. Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$.
Étudier les variations de la fonction $g$ et en déduire son signe.
c. En déduire les variations de la fonction $f$ sur I.

**PISTE**
c. Commencer par écrire $f'(x)$ en fonction de $g(x)$.

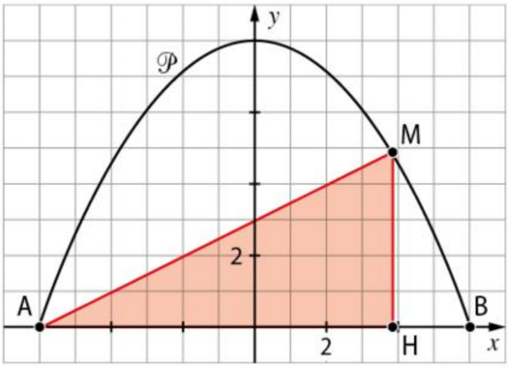
**82** Le plan est muni d'un repère orthonormé. On considère la droite $d$ d'équation $x = 12$. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction carré. Pour tout point M de coordonnées $(x ; 0)$ avec $x$ réel compris entre 0 et 12, on construit le rectangle ABCM comme sur la figure ci-dessous.




1. Déterminer, en fonction de $x$, les coordonnées des points A, B et C.
2. Montrer que l'aire du rectangle MABC est égale à $-x^3 + 12x^2$.
3. On considère la fonction $f$ définie sur $[0 ; 12]$ par :
$$f(x) = -x^3 + 12x^2.$$
a. Déterminer $f'(x)$ et étudier son signe.
b. Étudier les variations de la fonction $f$ sur $[0 ; 12]$.
4. Déterminer la position du point M rendant l'aire du rectangle MABC maximale et préciser cette aire.

Capacité 6, p. 144

**85** Dans un repère orthonormé du plan, on considère la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = -\frac{2}{9}x^2 + 8$.




Elle coupe l'axe des abscisses en A(–6 ; 0) et B(6 ; 0). Soit un point M sur l'arc de parabole compris entre A et B et H son projeté orthogonal sur [AB].

On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle [–6 ; 6] par :

$$f(x) = -\frac{1}{9}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + 4x + 24.$$

**a.** Montrer que l'aire du triangle AMH est égale à $f(x)$.

**b.** Calculer $f'(x)$.

**c.** Étudier les variations de $f$.

**d.** Déterminer la position de M pour laquelle l'aire du triangle AMH est maximale et préciser cette aire.

## Sujet B 20 min RAISONNER CALCULER

**CAPACITÉS MISES EN ŒUVRE**

- *Étudier les variations d'une fonction*
- *Déterminer un encadrement*

Pour les fêtes de fin d'année, une entreprise produit des objets décoratifs. Le coût de production est modélisé par la fonction $C$ définie sur l'intervalle [10 ; 60] par $C(q) = q^3 - 105q^2 + 3\,000q + 8\,500$, où $q$ est le nombre d'objets décoratifs fabriqués et $C(q)$ est le coût de la production, en euros, de $q$ objets décoratifs.

**a.** Déterminer $C'(q)$ et étudier son signe.

**b.** Dresser le tableau de variation de la fonction $C$.

**c.** Déterminer la production à réaliser pour obtenir le bénéfice maximal et la valeur de ce bénéfice.

**d.** Donner un encadrement de $C(q)$ sur [10 ; 60].