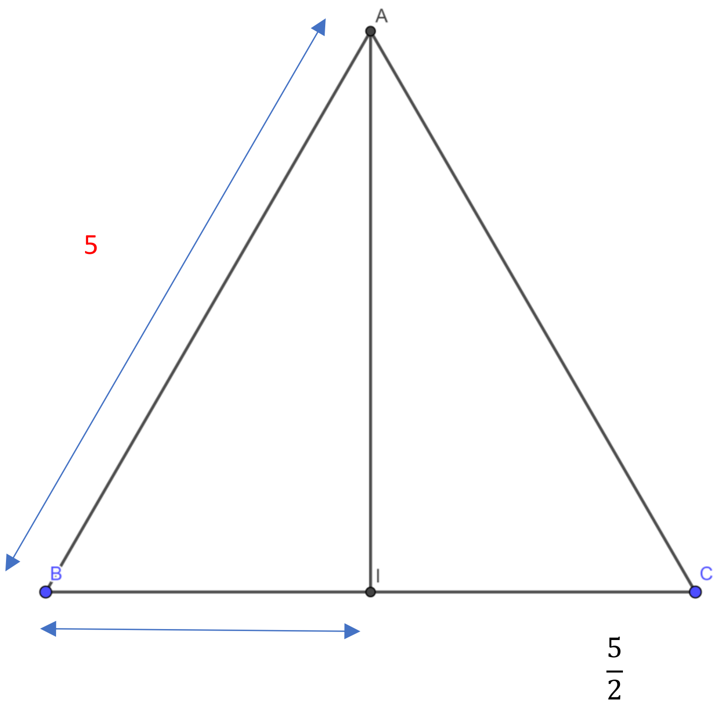
43 Soit un triangle équilatéral ABC de côté 5 et I le milieu de [BC].

1. Montrer que $AI = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$.

2. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{BC}$.



1.Le triangle ABC étant équilatéral, la médiane (AI) est aussi une hauteur du triangle ABC

On applique le théorème de Pythagore dans le triangle ABI rectangle en I. On a :

$$BI^2 + AI^2 = AB^2 .$$

Ainsi , $AI^2 = AB^2 - BI^2$

$$= 5^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$= \frac{75}{4}$$

On en déduit que $AI = \sqrt{\frac{75}{4}} = \frac{\sqrt{75}}{\sqrt{4}} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

2.$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\times\cos(\widehat{BAC})$

$=5\times 5\times\cos(60°)$ (mode degré)

$=25\times\frac{1}{2}$

$=\frac{25}{2}$

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}=\|\overrightarrow{BC}\|\times\|\overrightarrow{BA}\|\times\cos(\widehat{ABC})$

$=5\times 5\times\cos(60°)$

$=25\times\frac{1}{2}$

$=\frac{25}{2}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI}=\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AI}\|\times\cos(\widehat{BAI})$

$=5\times\frac{5\sqrt{3}}{2}\times\cos(30°)$

$=5\times\frac{5\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{25\times 3}{4}$

$=\frac{75}{4}$

$\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{CA}=\|\overrightarrow{CI}\|\times\|\overrightarrow{CA}\|\times\cos(\widehat{ACI})$

$=\frac{5}{2}\times 5\times\cos(60°)$

$=\frac{5}{2}\times 5\times\frac{1}{2}$

$=\frac{25}{4}$

$\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{BC}=-\|\overrightarrow{IB}\|\times\|\overrightarrow{BC}\|$ car $\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires de sens contraires

$=-\frac{5}{2}\times 5$

$=-\frac{25}{2}$

45 Déterminer la longueur CA sachant que :

a. $CB=2\sqrt{5}$, $\cos(\widehat{BCA})=\frac{\sqrt{2}}{10}$ et $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=2$.

b. $CB=\sqrt{5}$, $\cos(\widehat{BCA})=-\frac{3}{5}$ et $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=-6$.

a)$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=2\Leftrightarrow\|\overrightarrow{CA}\|\times\|\overrightarrow{CB}\|\times\cos(\widehat{BCA})=2$

$$\Leftrightarrow CA\times 2\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{2}}{10}=2$$

$$\Leftrightarrow CA\times\frac{\sqrt{10}}{5}=2$$

$$\Leftrightarrow CA=\frac{2}{\frac{\sqrt{10}}{5}}=\frac{10}{\sqrt{10}}=\frac{10\sqrt{10}}{10}=\sqrt{10}$$

b)$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=-6\Leftrightarrow\|\overrightarrow{CA}\|\times\|\overrightarrow{CB}\|\times\cos(\widehat{BCA})=-6$

$$\Leftrightarrow CA\times\sqrt{5}\times-\frac{3}{5}=-6$$

$$\Leftrightarrow CA\times\frac{-3\sqrt{5}}{5}=-6$$

$$\Leftrightarrow CA=\frac{-6}{\frac{-3\sqrt{5}}{5}}=\frac{30}{3\sqrt{5}}=\frac{30\sqrt{5}}{15}=2\sqrt{5}$$

20 Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que :

$$\|\vec{u}\| = 4, \|\vec{v}\| = 3 \text{ et } \vec{u} \cdot \vec{v} = 6.$$

a. Calculer $\vec{u}^2$ et $\vec{v}^2$ et $(\vec{u}+\vec{v})^2$.

b. Calculer $\vec{u} \cdot (\vec{u}-\vec{v})$.

a)$\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2 = 16$

$\vec{v}^2 = \|\vec{v}\|^2 = 9$

$$(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2 = 16 + 2 \times 6 + 9 = 37$$

b) $\vec{u}.(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}.\vec{u} - \vec{u}.\vec{v} = \vec{u}^2 - \vec{u}.\vec{v} = 16 - 6 = 10$

21 On considère quatre points A, B, C et D tels que :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \text{ et } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 2.$$

Écrire $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CD}$ et calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.

21 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 3.$

55 Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 6$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 15$.

a. Déterminer $\vec{v} \cdot \vec{u}$.

b. Calculer $(\vec{u}-\vec{v})^2$.

c. Calculer $(2\vec{u}-3\vec{v}) \cdot (\vec{v}-2\vec{u})$.

a) $\vec{v}.\vec{u} = \vec{u}.\vec{v} = 15$

b)$(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = 25 - 2 \times 15 + 36 = 31$

c)$(2\vec{u}-3\vec{v}).(\vec{v}-2\vec{u}) = 2\vec{u}.\vec{v} + 2\vec{u}.(-2\vec{u}) - 3\vec{v}.\vec{v} - 3\vec{v}.(-2\vec{u})$

$= 2 \times \vec{u}.\vec{v} - 4\vec{u}^2 - 3\vec{v}^2 + 6 \times \vec{v}.\vec{u}$ or $\vec{v}.\vec{u} = \vec{u}.\vec{v}$

$$= 8 \times \vec{u}.\vec{v} - 4\|\vec{u}\|^2 - 3\|\vec{v}\|^2$$

$$= 8 \times 15 - 4 \times 25 - 3 \times 36$$

$$= -88$$

56 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de normes respectives 2 et 5, et tels que $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$.

a. Calculer $(4\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot (2\vec{u} + 5\vec{v})$.

b. Calculer $(-\vec{u} - 7\vec{v}) \cdot (3\vec{v} + 4\vec{u})$.

c. Calculer $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + 4\vec{v})$.

a)$(4\vec{u} - 3\vec{v}).(2\vec{u} + 5\vec{v}) = 4\vec{u}.2\vec{u} + 4\vec{u}.5\vec{v} - 3\vec{v}.2\vec{u} - 3\vec{v}.5\vec{v}$

$= 8 \times \vec{u}^2 + 20\vec{u}.\vec{v} - 6 \times \vec{v}.\vec{u} - 15 \times \vec{v}^2$ or $\vec{v}.\vec{u} = \vec{u}.\vec{v}$

$$= 8 \times \|\vec{u}\|^2 + 14 \times \vec{u}.\vec{v} - 15 \times \|\vec{v}\|^2$$

$$= 8 \times 4 + 14 \times (-1) - 15 \times 25$$

$$= -357$$

b. $(-\vec{u} - 7\vec{v}).(3\vec{v} + 4\vec{u}) = -510$

c. $(\vec{u} - \vec{v}).(\vec{u} + 4\vec{v}) = -99$

34 On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

1. On suppose $\|\vec{u}\| = 6$; $\|\vec{v}\| = 1$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5$. Calculer $\|\vec{u} + \vec{v}\|$.

2. On suppose $\|\vec{u}\| = 2$; $\|\vec{v}\| = 5$ et $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 4$. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

1. $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = 36 + 2 \times 5 + 1 = 47$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{47} \approx 6{,}9$$

2.$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) = \frac{1}{2}(16 - 4 - 25) = -6{,}5$

33 On considère un triangle ABC.

a. En utilisant la formule d'Al-Kashi, exprimer BC^2 en fonction de AC, AB et $\cos\hat{A}$.

b. On a $AC = 4$, $AB = 13$ et $\hat{A} = 60°$. Calculer BC.

33 **a.** $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \times AB \times \cos(\hat{A})$

b)

$$BC^2 = 4^2 + 13^2 - 2 \times 4 \times 13 \times \cos(60)° = 185 - 104 \times 0{,}5 = 133$$
$$BC = \sqrt{133} \approx 11{,}5$$

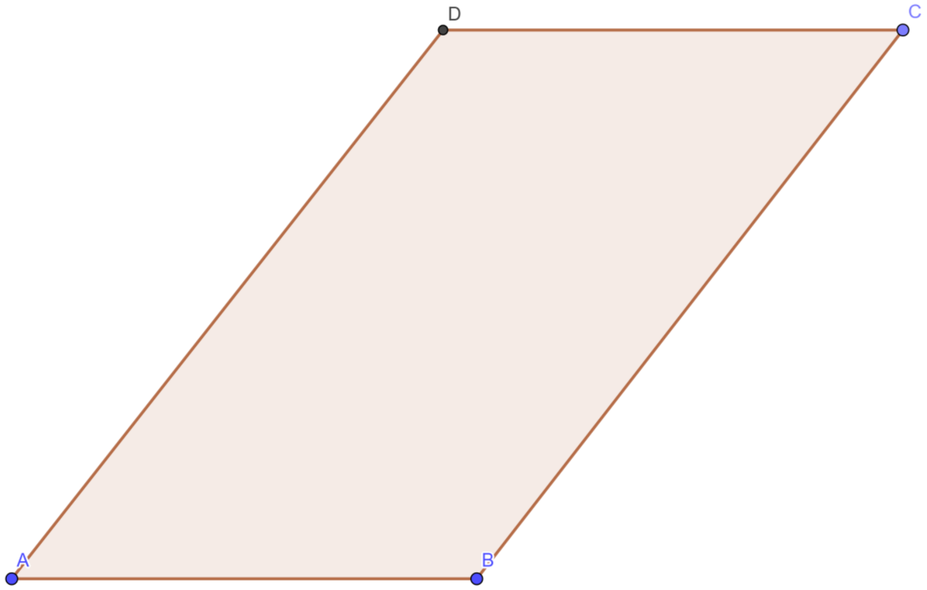
36 Soit ABCD un parallélogramme tel que :

$$AB = 4,\ AC = 9 \text{ et } AD = 6.$$

a. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.

b. En déduire une valeur approchée à un degré près de $\widehat{BAD}$.

1.



a. $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right\|^2 - AB^2 - AD^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}(AC^2 - AB^2 - AD^2)$$

$$= \frac{1}{2}(9^2 - 4^2 - 6^2)$$

=14,5

b. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 14{,}5 \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AD}\right\| \times \cos(\widehat{BAD}) = 14{,}5$

$$\Leftrightarrow 4 \times 6 \times \cos(\widehat{BAD}) = 14{,}5$$

$$\Leftrightarrow \cos(\widehat{BAD}) = \frac{29}{48}$$

$$\Leftrightarrow \widehat{BAD} = cos^{-1}\left(\frac{29}{48}\right) \approx 52{,}83°$$

Ex89,93,95,96,97,98p233

89 Le triangle DEF est tel que DE = 6, DF = 3 et $\widehat{D} = \dfrac{\pi}{4}$.
Calculer EF.

Capacité 7, p. 225

$$EF^2 = 45 - 9\sqrt{2}$$

EF≈4,421

93 Un triangle ABC est tel que AB = 4, BC = 5 et AC = 7.

a. En utilisant la formule d'Al-Kashi, montrer que :

$$16 = 35 + 49 - 70\cos\widehat{C}.$$

b. En déduire la valeur exacte de $\cos\widehat{C}$.

c. En déduire une valeur approchée de l'angle $\widehat{C}$ à 0,1 degré près.

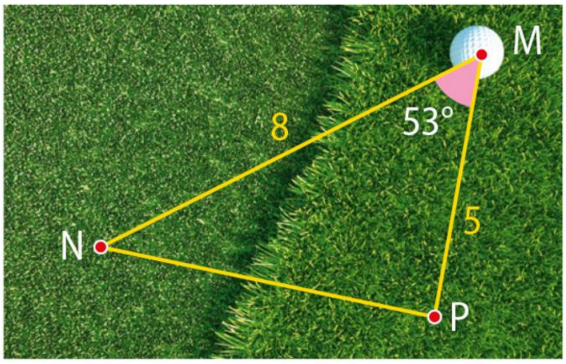
93 *Errata : l'erreur suivante peut se trouver dans certains ouvrages, il faut lire : 25 et non 35 dans la question* ***a.***

a. $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2 \times BC \times AC \times \cos(\widehat{C}) \Leftrightarrow 16 = 25 + 49 - 70\cos(\widehat{C})$,

b. $\cos(\widehat{C}) = \frac{58}{70} \approx 0{,}829$

c. $\widehat{C} \approx 34{,}1°$

95 Sur un *green* de golf, trois positions de la balle sont repérées en M, N et P sur le schéma ci-contre. Le triangle MNP est tel que MN = 8, MP = 5 et $\widehat{M} = 53°$.
Calculer la valeur exacte de NP, puis son arrondi à 0,1 près.



95 $NP = \sqrt{89 - 80\cos(53)} \approx 6{,}4$

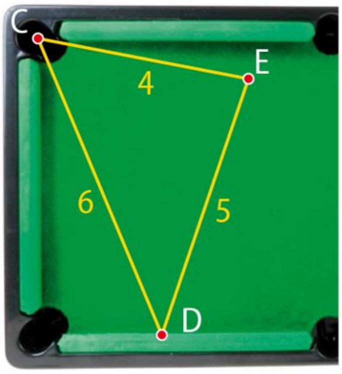
96 Dans un triangle ABC on a $AB = 6$, $AC = 4$ et $BC = 5$.

1. Déterminer $\cos(\widehat{BAC})$, puis $\widehat{BAC}$ au degré près.

2. Donner la valeur exacte de $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

97 Le triangle IGN est tel que $IG = 2$, $IN = \sqrt{10}$ et $GN = \sqrt{2}$.
Calculer la valeur exacte de l'angle $\hat{G}$.

98 Pour éviter la boule noire, un joueur de billard souhaite faire rebondir sur un point D de la bande une boule blanche qui part de E, afin d'empocher la boule rouge située en C. Les côtés du triangle CED sont tels que $CE = 4$, $ED = 5$ et $CD = 6$.
Calculer les trois angles du triangle, au degré près.



LE SAVIEZ-VOUS

Les six orifices autour d'une table de billard s'appellent des poches. Lorsqu'un joueur parvient à y faire tomber une boule, on dit qu'il l'empoche.

96 **1.** $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{27}{48} = 0{,}5625$ d'où $\widehat{BAC} \approx 56°$.

2. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 13{,}5$

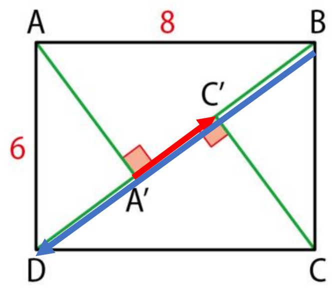
97 $\widehat{G} = 135°$

98 $\widehat{D} = 41°$, $\widehat{C} = 56°$ et $\widehat{E} = 83°$.

60 ABCD est un rectangle tel que :

AB = 8 et AD = 6.

On note A′ et C′ les projetés orthogonaux de A et C sur [DB].



1. Décomposer le vecteur $\overrightarrow{AC}$ avec la relation de Chasles en faisant apparaître le vecteur $\overrightarrow{A'C'}$.

2. a. Montrer que $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{A'C'} \cdot \overrightarrow{BD}$.

b. Montrer que $AD^2 - AB^2 = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$.

3. Déduire des questions précédentes la longueur du segment [A′C′].

1.$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'C'} + \overrightarrow{C'C}$

$$2. a)\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'C'} + \overrightarrow{C'C}).\overrightarrow{BD}$$

=$\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{A'C'}.\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{C'C}.\overrightarrow{BD}$ or $\overrightarrow{AA'}$ *et* $\overrightarrow{BD}$ sont orthogonaux ainsi que $\overrightarrow{CC'}$ *et* $\overrightarrow{BD}$

=$0 + \overrightarrow{A'C'}.\overrightarrow{BD} + 0$

=$\overrightarrow{A'C'}.\overrightarrow{BD}$

b)$AD^2 - AB^2 = \overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{AB}^2$ $\quad$ *or* $(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

$$= (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}).(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB})$$

$= (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA}).(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB})$ car $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ (ABCD est un parallélogramme)

$$= (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}).(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$$

$$= \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC}$$

$$= \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$$

3.D'après les questions précédentes , $\overrightarrow{A'C'}.\overrightarrow{BD} = AD^2 - AB^2 = 6^2 - 8^2 = 36 - 64 = -28$

Or $\overrightarrow{A'C'}.\overrightarrow{BD} = -A'C' \times BD$ car les vecteurs $\overrightarrow{A'C'}$ *et* $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires de sens contraire.

Ainsi , $-A'C' \times BD = -28$.

Pour calculer BD, on applique le théorème de Pythagore dans le triangle ABD rectangle en A .

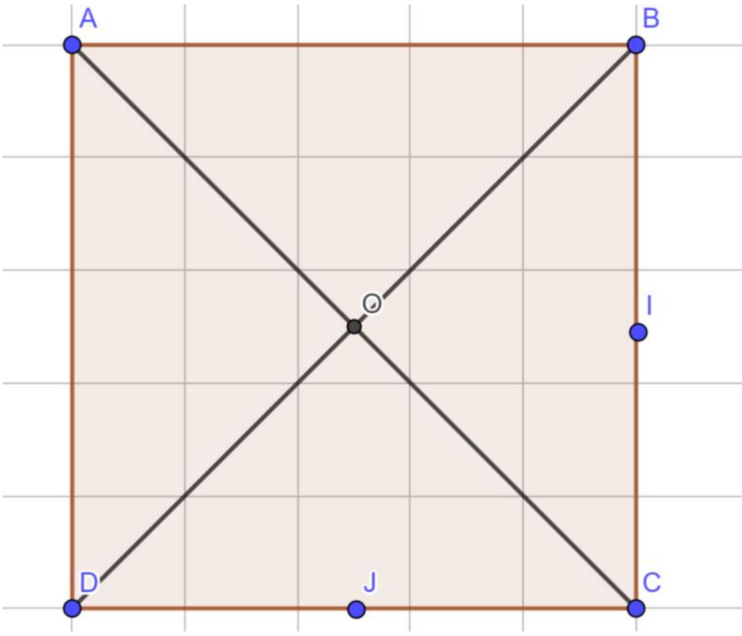
$$BD^2 = AB^2 + AD^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$$

Ainsi $BD = \sqrt{100} = 10$

$-A'C' \times 10 = -28$ par conséquent , $A'C' = 2{,}8$.

Exercice 53page230

53 Soit un carré ABCD de centre O et de côté 5. Soit I le milieu de [BC] et J le milieu de [CD].
Calculer les produits scalaires suivants :
a. $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BI}$ **b.** $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}$ et $\overrightarrow{CJ}\cdot\overrightarrow{IB}$



a.

Pour calculer $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}$ on utilise le fait que A est le projeté orthogonal de D sur (AB).
Donc :

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BA}^2=BA^2=5^2=25.$$

Pour calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ on utilise le fait que B est le projeté orthogonal de C sur (AB).
Donc :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}^2=AB^2=5^2=25.$$

Pour calculer $\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BI}$ on utilise le fait que I est le projeté orthogonal de O sur (BC)
Donc :

$$\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{BI}^2=BI^2=\left(\frac{BC}{2}\right)^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}.$$

b.

Les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux.
On a donc : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0.$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}.\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\times 25=\frac{25}{2}$$

(CJ) et (CD) sont confondues d'une part et (IB) et (CB) sont confondues d'autre part.
Or (CD) et (CB) sont perpendiculaires, donc (CJ) et (IB) sont perpendiculaires.
Donc les vecteurs $\overrightarrow{CJ}$ et $\overrightarrow{IB}$ sont orthogonaux et $\overrightarrow{CJ} \cdot \overrightarrow{IB} = 0$.

61 On considère les points : A(–4 ; 6) ; B(8 ; –4) et C(1 ; 3).
Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Capacité 4, p. 225

$\overrightarrow{AB}(12; -10)$ $\overrightarrow{AC}$(5 ; -3) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = xx' + yy = 12 \times 5 + (-10) \times (-3 = 90$

$\overrightarrow{AB}(12; -10)$ $\overrightarrow{BC}$(-7 ;7) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = xx' + yy = 12 \times (-7) + (-10) \times 7 = -154$

$\overrightarrow{AB}(12; -10)$ $\overrightarrow{BA}$(-12 ;10) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BA} = xx' + yy = 12 \times (-12) + (-10) \times 10 = -244$

$\overrightarrow{AC}(5; -3)$ $\overrightarrow{BC}$(-7 ;7) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = xx' + yy = 5 \times (-7) + (-3) \times 7 = -56$

62 Soit les points A (–5 ; 2), B (7 ; –3) et C(–11 ; –6).
a. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
b. Calculer $\overrightarrow{AB}^2$ et en déduire $\|\overrightarrow{AB}\|$.
c. Calculer $\|\overrightarrow{AC}\|$ et en déduire $\overrightarrow{AC}^2$.

a)$\overrightarrow{AB}(12; -5)$ $\overrightarrow{AC}$(-6 ; -8)

b)$\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = 12 \times 12 + (-5) \times (-5) = 144 + 25 = 169$

$\|\overrightarrow{AB}\|^2 = \overrightarrow{AB}^2 = 169$ ainsi $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{169} = 13$

c)$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-6)^2 + (-8)^2} = \sqrt{100} = 10 \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\overrightarrow{AC}^2 = \|\overrightarrow{AC}\|^2 = 10^2 = 100$

68 Soit les vecteurs $\vec{u}\,(-5\,;9)$, $\vec{v}\,(1\,;-3)$ et $\vec{w}\,(m\,;2)$.
1. Déterminer le réel m tel que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ soient orthogonaux.
2. Déterminer le réel m tel que les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ soient orthogonaux.

1.$\vec{u}$ *et* $\vec{w}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \vec{u}.\vec{w} = 0$

$$\Leftrightarrow (-5) \times m + 9 \times 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -5m = -18$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{18}{5}$$

2.$\vec{v}$ *et* $\vec{w}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \vec{v}.\vec{w} = 0$

$$\Leftrightarrow 1 \times m + (-3) \times 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = 6$$

69 Soit les points E(–1 ; 3), F$\left(\frac{3}{2}\,;\,\frac{5}{2}\right)$ et G(1 ; 0).

1. Calculer $\overrightarrow{GE} \cdot \overrightarrow{GF}$.

2. Calculer GE et GF.

3. En déduire la mesure exacte en radians de l'angle $\widehat{EGF}$.

1.$\overrightarrow{GE}(-2; 3)$ $\overrightarrow{GF}(\frac{1}{2}\,;\frac{5}{2})$ $\overrightarrow{GE}.\overrightarrow{GF} = (-2) \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{5}{2} = \frac{13}{2}$

2.$\|\overrightarrow{GE}\| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}\|\overrightarrow{GF}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (\frac{5}{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{13}{2}}.$

3.$\overrightarrow{GE}.\overrightarrow{GF} = \frac{13}{2} \Leftrightarrow \|\overrightarrow{GE}\| \times \|\overrightarrow{GF}\| \times \cos(\widehat{EGF}) = \frac{13}{2}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{13} \times \sqrt{\frac{13}{2}} \times \cos(\widehat{EGF}) = \frac{13}{2}$$

$$\Leftrightarrow 13\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\widehat{EGF}) = \frac{13}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos(\widehat{EGF}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\widehat{EGF} = cos^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2}) \approx 45degrés$$

71 Soit les points A(–2 ; 3), B(7 ; 0), C(4 ; 5) et D(2 ; –1).
Montrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Capacité 5, p. 225

$\overrightarrow{AB}(9; -3)$ $\overrightarrow{CD}$(-2 ; -6)

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 9 \times (-2) + (-3) \times (-6) = -18 + 18 = 0$$

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux et donc que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

72 Soit les points A($\sqrt{3}$; 3), B(1 ; 2$\sqrt{3}$) et C(2 ; 1).
Montrer que les droites (AB) et (OC) ne sont pas perpendiculaires.

72 *Le corrigé détaillé de cet exercice est disponible dans le manuel numérique enseignant, le manuel numérique élève et le site élève lycee.editions-bordas.fr.*

$\overrightarrow{AB}\left(1-\sqrt{3}\,;2\sqrt{3}-3\right)$ et $\overrightarrow{OC}(2\,;1)$.

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OC} = \left(1-\sqrt{3}\right)\times 2 + \left(2\sqrt{3}-3\right)\times 1$$
$$= 2-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}-3 = -1 \neq 0$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OC}$ ne sont pas orthogonaux, donc les droites (AB) et (OC) ne sont pas perpendiculaires.

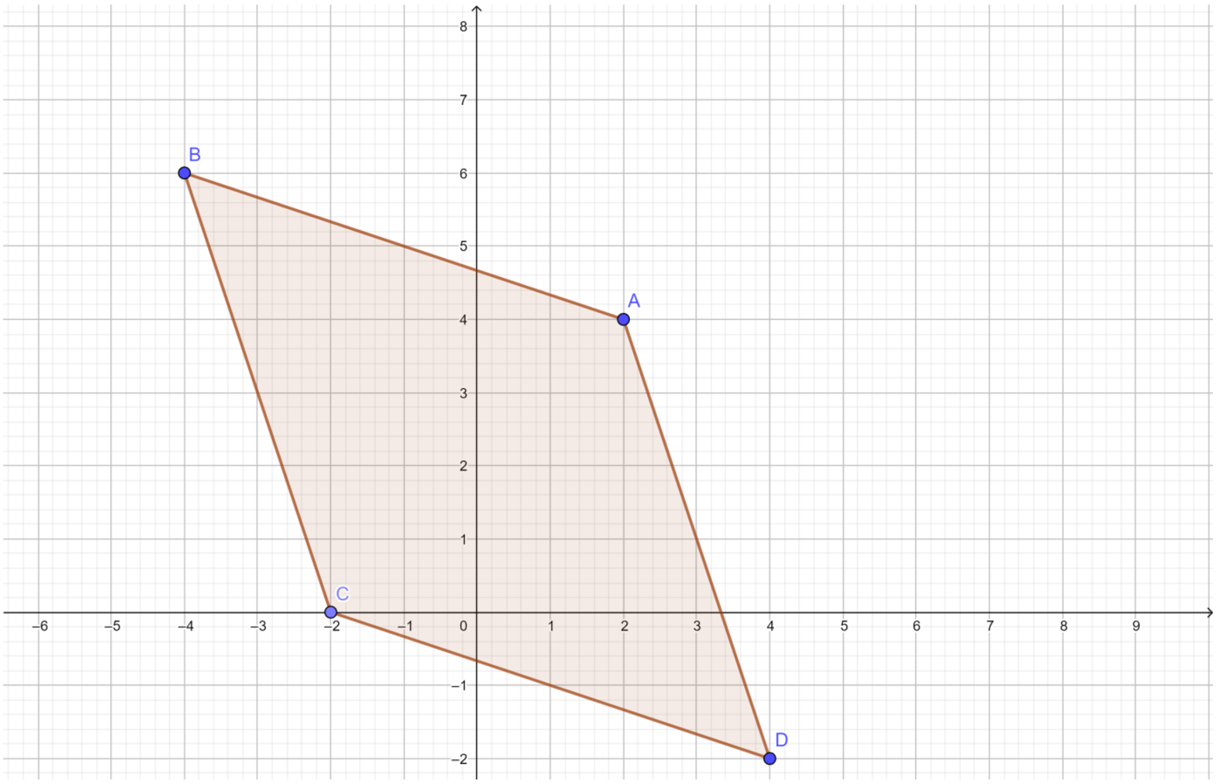
73 Soit les points A(2 ; 4), B(–4 ; 6), C(–2 ; 0) et D(4 ; –2).

1. Montrer que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

2. Calculer $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC}$.

3. Calculer $\overrightarrow{AC}^2$ et $\overrightarrow{BD}^2$.

4. En déduire la nature du quadrilatère ABCD.



1.$\overrightarrow{AB}(-6;2)$ $\overrightarrow{DC}$(-6 ;2)

On en déduit donc que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et donc que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

2.$\overrightarrow{BD}(8;-8)$ $\overrightarrow{AC}$(-4 ; -4)

$$\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC} = 8\times(-4)+(-8)\times(-4) = -32+32 = 0$$

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux .

3. $\overrightarrow{AC}^2 = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC} = (-4)^2+(-4)^2 = 16+16 = 32$

$\overrightarrow{BD}^2 = \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BD} = 8^2+(-8)^2 = 64+64 = 128$.

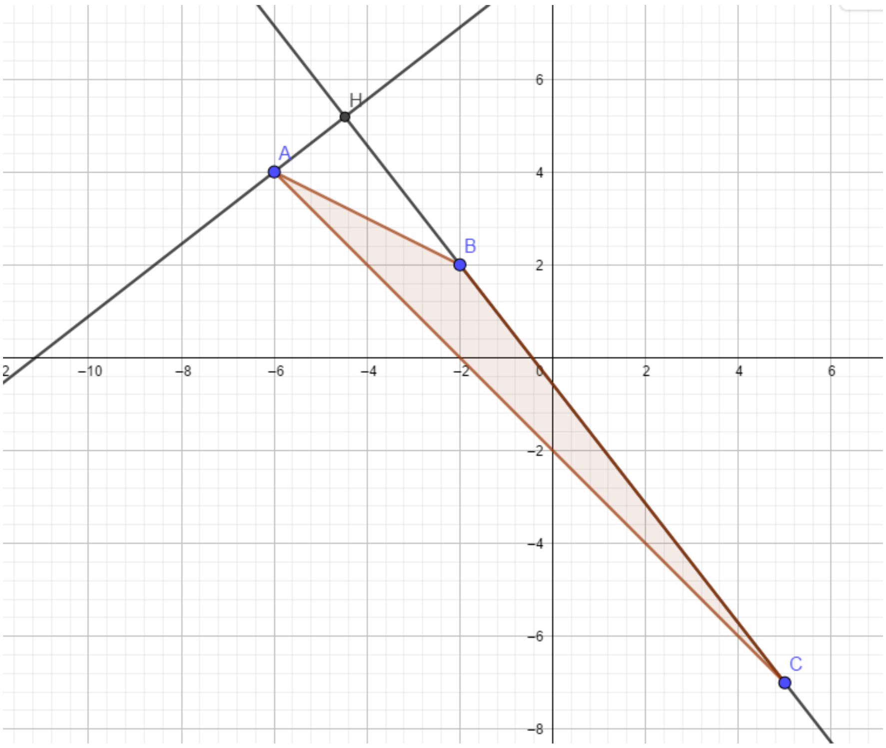
4.Ainsi le parallélogramme ABCD qui a ses diagonales perpendiculaires mais pas de la même longueur est un losange mais n’est pas un carré.

79 Soit les points A(–6 ; 4), B(–2 ; 2) et C(5 ; –7).

1. Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

2. On note H le projeté orthogonal de A sur [BC].
Montrer que $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BC}$.

3. Calculer BC. En déduire BH et HC.



1.$\overrightarrow{BA}(-4; 2)$ $\overrightarrow{BC}$(7 ;-9)

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = (-4) \times 7 + 2 \times (-9) = -28 - 18 = -46$$

2.$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \left(\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HA}\right).\overrightarrow{BC}$

$= \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC}$ or $\overrightarrow{HA}$ *et* $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux.

$$= \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC} + 0$$

$$= \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}$$

3.Or les vecteurs $\overrightarrow{BH}$ *et* $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires de sens opposé.

On en déduit que $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC} = -BH \times BC$ Or $BC = \sqrt{7^2 + (-9)^2} = \sqrt{130}$

Par conséquent, $-BH \times \sqrt{130} = -46$

soit $BH = \frac{46}{\sqrt{130}} = \frac{46\sqrt{130}}{130} = \frac{23\sqrt{130}}{65}$

$$HC = BH + BC = \frac{23\sqrt{130}}{65} + \sqrt{130} = \frac{23\sqrt{130}}{65} + \frac{65\sqrt{130}}{65} = \frac{88\sqrt{130}}{65}$$

84 Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les points A(1 ; 3), B(–3 ; 2) et C(6 ; –4).

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$.

2. En déduire une valeur approchée, au degré près, des mesures des angles du triangle ABC.

1.$\overrightarrow{AB}(-4;-1)$ $\quad$ $\overrightarrow{AC}(5;-7)$

$AB = \sqrt{(-4)^2+(-1)^2} = \sqrt{17}$ $\qquad$ $AC = \sqrt{5^2+(-7)^2} = \sqrt{74}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = (-4)\times 5 + (-1)\times(-7) = -20+7 = -13$

$\overrightarrow{BC}$(9 ;-6) $\quad$ $\overrightarrow{BA}(4;1)$

$BC = \sqrt{117}$ $\quad$ $BA = \sqrt{17}$

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = 9\times 4 + (-6)\times 1 = 30$

2.$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -13 \Leftrightarrow AB\times AC\times \cos(\widehat{BAC}) = -13$

$\Leftrightarrow \sqrt{17}\times\sqrt{74}\times\cos(\widehat{BAC}) = -13$

$\Leftrightarrow \cos(\widehat{BAC}) = \frac{-13}{\sqrt{1258}}$

$\Leftrightarrow \quad \widehat{BAC} = cos^{-1}(\frac{-13}{\sqrt{1258}}) \approx 112degrés$

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = 30 \Leftrightarrow BC\times BA\times\cos(\widehat{ABC}) = 30$

$\Leftrightarrow \sqrt{117}\times\sqrt{17}\times\cos(\widehat{ABC}) = 30$

$\Leftrightarrow \cos(\widehat{ABC}) = \frac{30}{\sqrt{1989}}$

$\Leftrightarrow \widehat{ABC} = cos^{-1}(\frac{30}{\sqrt{1989}}) \approx 48degrés$

La somme des angles d'un triangle valant 180 ° , on trouve $\widehat{ACB} \approx 20°$

Dans les exercices 116 à 123, calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ en utilisant l'expression du produit scalaire la plus adaptée.

116 ABC est un triangle tel que AB = 4, AC = 5 et BC = 9.

117 ABC est un triangle tel que AB = 4, AC = 5 et $\widehat{BAC} = \frac{5\pi}{6}$.

118 ABC est un triangle équilatéral de côté 5.

119 Les trois points A, B et C sont tels que AB = 8, BC = 4 et B appartient au segment [AC].

120 Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, A(1 ; 7), B(−2 ; 9) et C(3 ; 8).

121 Le cercle de diamètre [BC] passe par A.

122 ABCD est un losange de centre O dans lequel la diagonale [AC] mesure 20 cm.

123 ABCD est un rectangle dans lequel AB = 8.

Capacité 9, p. 227

116p235 prendre BC=6

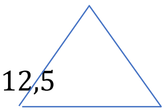
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) = 2{,}5$$

117p235

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = 20 \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -10\sqrt{3}$$

118p235

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = 25 \cos(60) = 12{,}5$$



120p235

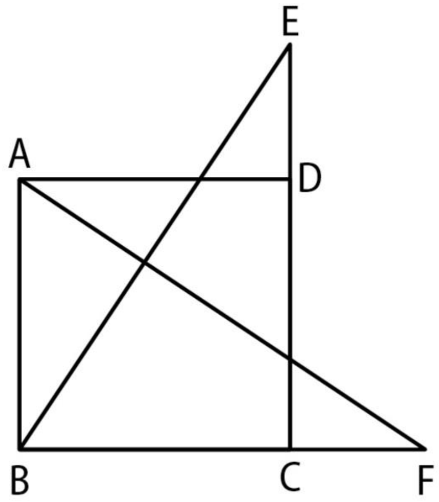
$$\overrightarrow{AB}(-3; 2)\overrightarrow{AC}(2; 1)$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = xx' + yy' = (-3) \times 2 + 2 \times 1 = -4$$

121p235

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$$

124 ABCD est un carré de côté 1.
On construit les points E et F tels que $\overrightarrow{CE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{BF}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$.
Démontrer que les droites (AF) et (BE) sont perpendiculaires :
a. en décomposant $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{BE}$;
b. en se plaçant dans le repère orthonormé $(B ; \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.



a)$\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{BE}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}).(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE})$

$=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{BF}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BF}.\overrightarrow{CE}$ or $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux

$=0+\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BC}+\frac{9}{4}\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CD}$ or $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux

$=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}^2+\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}^2$

$=-\frac{3}{2}\times 1^2+\frac{3}{2}\times 1^2$

$=\ 0$

b)$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{BC}+\frac{3}{2}\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BC}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BA}$

Dans le repère , (B ;$\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}$) , A(0 ;1) et F($\frac{3}{2}$; 0) B(0 ;0) et E(1 ;$\frac{3}{2}$)

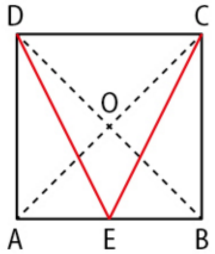
$\overrightarrow{AF}(\frac{3}{2};-1)$ et $\overrightarrow{BE}(1;\frac{3}{2})$$\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{BE}=\frac{3}{2}\times 1+(-1)\times\frac{3}{2}=0$

Sujet A 20 min REPRÉSENTER CALCULER

CAPACITÉS MISES EN ŒUVRE

- *Calculer un produit scalaire en utilisant son expression analytique*
- *Calculer un angle en utilisant le produit scalaire*

ABCD est un carré de centre O et de côté 1. E est le milieu de [AB]. On se place dans le repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$.



1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}$.

2. Calculer $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DB}$, puis déterminer une mesure de l'angle $\widehat{EDB}$ à 0,1degré près.

3. a. Calculer $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{EC}$.

b. Quel est l'angle dont on peut déduire la mesure ? Préciser sa valeur à 0,1 degré près.

4. Déterminer le point F du segment [AD] tel que (OF) est perpendiculaire à (DE).

1. Dans le repère , (A ;$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}$) , A(0 ;0) , E($\frac{1}{2};0$) et C(1 ;1)

$\overrightarrow{AE}(\frac{1}{2};0)$ et $\overrightarrow{AC}(1;1)\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\times 1+0\times 1=\frac{1}{2}$

2 .Dans le repère , (A ;$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}$) , D(0 ;1) , E($\frac{1}{2};0$) et B(1 ;0)

$\overrightarrow{DE}(\frac{1}{2};-1)$ et $\overrightarrow{DB}(1;-1)\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{DB}=\frac{1}{2}\times 1+(-1)\times(-1)=\frac{3}{2}$

$DE=\frac{\sqrt{5}}{2}$ et $DE=\sqrt{2}$

$$\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{DB}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow DE\times DB\times\cos(\widehat{EDB})=\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{5}}{2}\times\sqrt{2}\times\cos(\widehat{EDB})=\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow\cos(\widehat{EDB})=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\Leftrightarrow\widehat{EDB}\approx 18{,}4°$$

3.a)Dans le repère , (A ;$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}$) , D(0 ;1) , E($\frac{1}{2};0$) et C(1 ;1)

$\overrightarrow{DE}(\frac{1}{2};-1)$ et $\overrightarrow{EC}(\frac{1}{2};1)\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{EC}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+(-1)\times 1=-\frac{3}{4}$

b)On en déduit que $\overrightarrow{ED}.\overrightarrow{EC}=\frac{3}{4}$

$$DE=\frac{\sqrt{5}}{2}EC=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\overrightarrow{ED}.\overrightarrow{EC} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{5}{4} \times \cos(\widehat{DEC}) = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \cos(\widehat{DEC}) = \frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow \widehat{DEC} \approx 53{,}1°$$

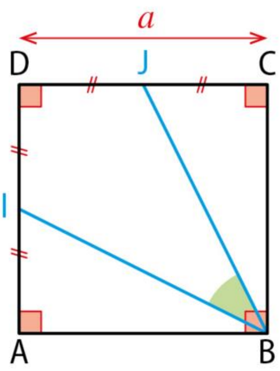
4. $Soit$ F(0 ;y) $\quad \overrightarrow{DE}(\frac{1}{2}; -1)\overrightarrow{OF}(-\frac{1}{2}; y - \frac{1}{2})$

$$\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{OF} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \times -\frac{1}{2} + (-1)\left(y - \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow -y + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}$$

(0 ;0,25)

88 CHERCHER COMMUNIQUER

ABCD est un carré de côté a. On note I le milieu du côté [AD] et J le milieu du côté [DC].



1. a. Montrer que $BI = BJ = a\frac{\sqrt{5}}{2}$.

b. En déduire que $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BJ} = \frac{5}{4}a^2 \cos(\widehat{IBJ})$.

2. En décomposant les vecteurs $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BJ}$, montrer que $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BJ} = a^2$.

3. Déduire des questions **1.** et **2.** une valeur approchée de la mesure de l'angle $\widehat{IBJ}$, au degré près.

1.a)Pour calculer BI, on applique le théorème de Pythagore dans le triangle ABI rectangle en A .

$$BI^2 = AB^2 + AI^2 = a^2 + (\frac{a}{2})^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{4a^2}{4} + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$$

Ainsi $BI = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = \frac{\sqrt{5}\sqrt{a^2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{5}|a|}{2} = \frac{\sqrt{5}a}{2}$ (a positif)

Raisonnement analogue pour la longueur BJ.

b. $\quad \overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BJ} = BI \times BJ \times \cos(\widehat{IBJ}) = \frac{\sqrt{5}a}{2} \times \frac{\sqrt{5}a}{2} \times \cos(\widehat{IBJ}) = \frac{5a^2}{4}\cos(\widehat{IBJ})$

2. $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BJ} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI}).(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CJ})$

$=\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{CJ}$

$=\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CD}$ or $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux ainsi que $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CD}$

$=0 + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BC} + 0$

$=\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AD}$

$=CD \times CJ + AI \times AD$

$=a \times \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \times a$

$=2 \times a \times \frac{a}{2}$

$=a^2$

3.On en déduit que :

$\frac{5a^2}{4}\cos(\widehat{IBJ}) = a^2$ soit $\frac{5}{4}\cos(\widehat{IBJ}) = 1$ soit $\cos(\widehat{IBJ}) = \frac{4}{5}$ soit encore $\widehat{IBJ} \approx 37°$

127 CHERCHER RAISONNER

Soit A et B deux points tels que $AB = 4$ et I milieu de [AB].

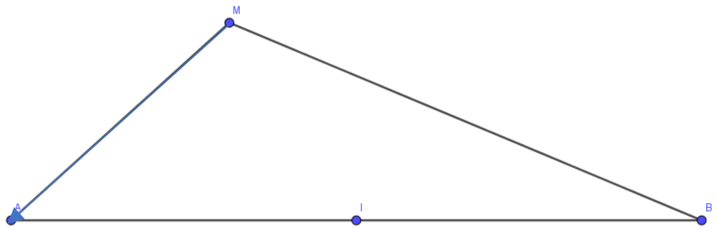
1. Démontrer que, pour tout point M du plan :

$$MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

2. Application : dans chacun des cas suivants, déterminer et construire l'ensemble des points M du plan.

a. $MA^2 - MB^2 = 16$

b. $MA^2 - MB^2 = -8$



1. $MA^2 - MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 (\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

$$= (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}).(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})$$

$= (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM}).(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})$ Or $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ (I milieu de [AB])

$$= \overrightarrow{BA}.2\overrightarrow{MI}$$

$$= (-\overrightarrow{AB}).(-2\overrightarrow{IM})$$

$$= 2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}$$

2.a) $MA^2 - MB^2 = 16 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = 16$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = 8$ Soit H le projeté orthogonal de M sur la droite (AB)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IH}.\overrightarrow{AB} = 8$ Or $\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires et puisque $\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{AB} > 0$ de même sens

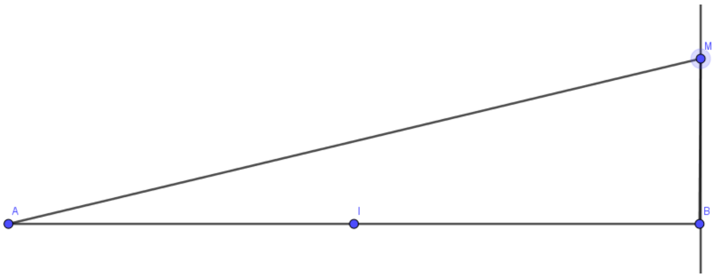
$$\Leftrightarrow IH \times 4 = 8$$

$$\Leftrightarrow IH = 2$$

$$\Leftrightarrow H\ est\ confondu\ avec\ le\ point\ B$$

$\Leftrightarrow M$ est sur la perpendiculaire à (AB)passant par B

L'ensemble des points M tels que $MA^2 - MB^2$ =16 est la perpendiculaire à (AB)passant par B



$MA^2 - MB^2$ =-8$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = -8$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = -4$ Soit H le projeté orthogonal de M sur la droite (AB)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IH}.\overrightarrow{AB} = -4$ Or $\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires et puisque $\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{AB} < 0$ de sens contraire

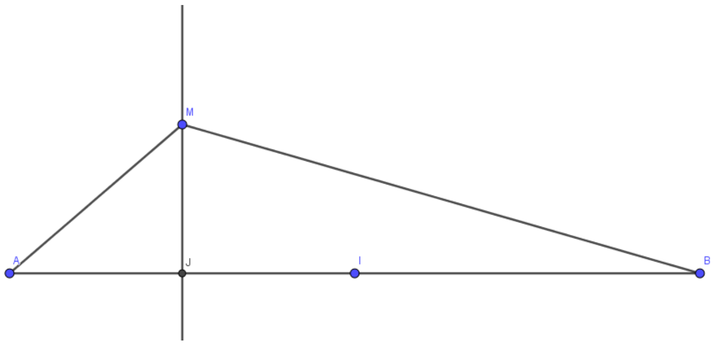
$$\Leftrightarrow -IH \times 4 = -4$$

$$\Leftrightarrow IH = 1$$

$\Leftrightarrow H$ est confondu avec le milieu de [AI]

$\Leftrightarrow M$ est sur la perpendiculaire à (AB)passant par le J milieu de [AI]

L'ensemble des points M tels que $MA^2 - MB^2$ =-8 est la perpendiculaire à (AB)passant par J



128 REPRÉSENTER RAISONNER

On considère un triangle ABC tel que $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$. On nomme I, J et K les milieux respectifs des côtés [BC], [AC] et [AB].

1. Montrer que, pour tout point M du plan :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

2. Montrer que les hauteurs du triangle ABC issues de A et B sont sécantes en un point H. En déduire que ces trois hauteurs sont concourantes.

1. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CM}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}).\overrightarrow{CA} + (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM}).\overrightarrow{AB}$

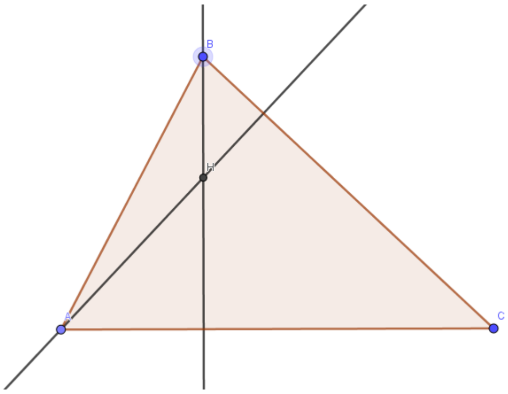
$$= \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}$$

$$= -\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}$$

$$= 0$$

2. Soit H l'intersection des hauteurs issues de A et de B.

Pour montrer que les 3 hauteurs sont concourantes en H , il suffit de prouver que la droite (CH) est la 3eme hauteur.



$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB} = 0$ Or $\overrightarrow{AH}\ et\ \overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux ainsi que $\overrightarrow{BH}\ et\ \overrightarrow{CA}$.

On en déduit que $0 + 0 + \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB} = 0$ soit $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB} = 0$

On en déduit que $\overrightarrow{CH}\ et\ \overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux et donc que les 3 hauteurs sont concourantes en