Exercices 27,28,29,30p85,77,83p89 , 85p89, 87,88p90 , 108,109,110,111p95

27 Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison 3.

1. Déterminer u_1, u_2 et u_3.

2. Expliquer pourquoi pour tout entier naturel n, $u_n = 5 + 3n$ puis déterminer u_7.

27 **1.** $u_1 = 8$, $u_2 = 11$ et $u_3 = 14$.

2. Par définition, $u_n = u_0 + r \times n$ pour tout entier naturel n et avec r la raison de la suite. On a $u_7 = 26$.

28 Soit (v_n) la suite arithmétique de premier terme $v_1 = 2$ et de raison -2.

1. Déterminer v_2, v_3 et v_4.

2. Expliquer pourquoi pour tout entier naturel n non nul, $v_n = 4 - 2n$ puis déterminer v_8.

28 **1.** $v_2 = 0$, $v_3 = -2$ et $v_4 = -4$.

2.Pour tout entier n non nul , $v_n = v_1 + (n-1)r = 2 + (-2)(n-1) = 2 - 2n + 2 = 4 - 2n$

$v_8 = 4 - 2 \times 8 = -12$

29 Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = -7$ et la relation $v_{n+1} = v_n - 3$ pour tout entier naturel n. (v_n) est-elle une suite arithmétique. Donner sa raison.

29 La suite v_n est une suite arithmétique de raison -3.

30 Soit (w_n) une suite arithmétique telle que $w_3 = 5$ et $w_4 = 8$.

1. Déterminer la raison de cette suite.

2. Calculer w_2, w_1 et w_0.

1. $r = w_4 - w_3 = 8 - 5 = 3.$
2. $w_3 - w_2 = 3 \quad soit \quad 5 - w_2 = 3$ soit $w_2 = 5 - 3 = 2$
   $w_1 = 2 - 3 = -1$
   $w_1 = -1 - 3 = -4$

77 Les suites ci-dessous sont définies sur $\mathbb{N}$. Pour chacune d'elles, préciser s'il s'agit d'une suite arithmétique et indiquer sa raison le cas échéant. Pour tout entier naturel n :

a. $\begin{cases} u_{n+1} = u_n - 5 \\ u_0 = -1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + n \\ u_0 = 2 \end{cases}$

c. $u_n = -5n + 3$

d. $u_n = n^2 - 2n + 1$

a)Pour tout entier naturel , $u_{n+1} - u_n = u_n - 5 - u_n = -5$
La différence entre un terme et son précédent reste constante et égale à –5.
(u_n) est une suite arithmétique de raison –5.

b)Pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = u_n + n - u_n = n$
La différence entre un terme et son précédent ne reste pas constante.
(u_n) n'est pas une suite arithmétique.

c) Pour tout entier naturel , $u_{n+1} - u_n = -5(n+1) + 3 - (-5n + 3)$

$$= -5n - 5 + 3 + 5n - 3$$
$$= -5$$

La différence entre un terme et son précédent reste constante et égale à –5.
(u_n) est une suite arithmétique de raison –5.

d)Pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 2(n+1) + 1 - (n^2 - 2n + 1)$

$$= n^2 + 2n + 1 - 2n - 2 + 1 - n^2 + 2n - 1$$

$$= 2n - 1$$

La différence entre un terme et son précédent ne reste pas constante.
(u_n) n'est pas une suite arithmétique.

83 Soit (u_n) la suite arithmétique telle que $u_0 = -2$ et $u_1 = 5$.

1. Déterminer le treizième terme de la suite.

2. Exprimer u_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

3. À partir de quel rang les termes u_n sont-ils supérieurs à 1 000 ?

4. Pour quelles valeurs de n le terme u_n est-il compris entre 500 et 1 000 ?

1. $u_1 = u_0 + r$. Donc $5 = -2 + r$ et $r = 7$.
Pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + r \times n$. Donc $u_n = -2 + 7 \times n = 7n - 2$.
2. u_{12} est le treizième terme de cette suite.
$u_{12} = 7 \times 12 - 2 = 82$.

3.On résout l'inéquation $u_n \geq 1000$

$7n - 2 \geq 1000 \Leftrightarrow 7n \geq 1002 \Leftrightarrow n \geq \frac{1002}{7}$ (143,14) $\Leftrightarrow n \geq 144$

4. On résout la double inéquation : $500 \leq 7n - 2 \leq 1\,000$. Donc $\frac{502}{7} \leq n \leq \frac{1002}{7}$.
$\frac{502}{7} \approx 71{,}7$. Donc l'entier n est compris entre 72 et 143.

MATHS & SVT

85 La croissance du fœtus est surveillée par échographie. Quand il est trop grand pour être visualisé complètement, on mesure **le diamètre bipariétal** (l'écartement entre les deux os qui se trouvent de chaque côté de la face).

On admet qu'à partir de la 11e semaine, le diamètre bipariétal augmente chaque semaine de 2 mm et qu'il vaut 24 mm à la fin de la 11e semaine. On note u_n sa valeur, exprimée en mm, à la fin de la $(n + 11)$-ième semaine de grossesse.

1. Donner u_0. Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

3. Au bout de combien de semaines, le diamètre bipariétal dépassera-t-il 5 cm ?

Capacité 8, p. 77

85 **1.** $u_0 = 24$, $u_1 = 26$, $u_2 = 28$ et $u_3 = 30$.

2.pour tout entier n, $u_{n+1} = u_n + 2$.

On en déduit que la suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 2$ et de 1er terme $u_0 = 24$.

Il vient alors que pour tout entier naturel n, on a : $u_n = u_0 + nr = 24 + 2n$.

3. On résout l'inéquation $u_n > 50$

$24 + 2n > 50 \Leftrightarrow 2n > 26 \Leftrightarrow n > 13 \Leftrightarrow n \geq 14$

Le diamètre bipariétal dépassera les 5 cm au bout de $14 + 11 = 25$ semaines.

87 ORAL **Vrai ou Faux ?**

La cotisation annuelle d'une association s'élevait à 50 € en 2019 et elle augmente de 5 € par an. On note u_n le montant de cette cotisation l'année $2019+n$.

Indiquer si les affirmations proposées sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. La suite (u_n) est arithmétique de raison 5.

2. En 2021, la cotisation sera de 55 €.

3. En 2029, une personne ayant adhéré en 2019 paiera le double de la cotisation initiale.

1. pour tout entier n, $u_{n+1} = u_n + 5$.
On en déduit que la suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 5$ et de 1er terme $u_0 = 50$.
AFFIRMATION VRAIE
Il vient alors que pour tout entier naturel n, on a : $u_n = u_0 + nr = 50 + 5n$.
2.On calcule $u_2 = 50 + 5 \times 2 = 60$.
AFFIRMATION FAUSSE
3.On calcule $u_{10} = 50 + 5 \times 10 = 100$.
AFFIRMATION VRAIE

88 ALGO **Compléter un algorithme**

Compléter l'algorithme ci-contre pour que la liste L contienne en fin d'algorithme, les termes $u_0, u_1, \dots, u_N$ d'une suite arithmétique de raison r.

$U \leftarrow u_0$
$L \leftarrow [\dots]$
Pour i variant de ... à ...
  $U \leftarrow \dots$
  $L \leftarrow \dots + [\dots]$
Fin Pour

$U \leftarrow u_0$
$L \leftarrow [U]$
Pour I variant de 1 à N
  $U \leftarrow U + r$
  $L \leftarrow L + [U]$
Fin Pour

Parcours 1 : Obtenir et utiliser le terme général d'une suite arithmétique

108 On considère la suite arithmétique (u_n) de premier terme u_0 et de raison r.
Déterminer l'expression du terme général u_n puis calculer le terme demandé.

a. $u_0 = 8$ et $r = -23$. Calculer u_{25}.
b. $u_0 = -19$ et $r = 4$. Calculer u_{135}.
c. $u_0 = -2$ et $r = \frac{1}{3}$. Calculer u_{10}.

109 On considère la suite arithmétique (u_n) de premier terme u_1 et de raison r.
Déterminer l'expression du terme général (u_n) puis calculer le terme demandé.

a. $u_1 = 3$ et $r = 2$. Calculer u_{21}.
b. $u_1 = -15$ et $r = 9$. Calculer u_{14}.
c. $u_1 = -1$ et $r = \frac{1}{2}$. Calculer u_{132}.

Ces exercices sont d'un niveau plus élevé.

110 (w_n) est la suite arithmétique telle que $w_0 = -6$ et $w_7 = 15$, calculer r puis w_1.

MÉTHODE : On peut écrire $w_7 = w_0 + 7r$. En déduire r.

111 En utilisant la méthode précédente, calculer la raison r pour les suites arithmétiques vérifiant :

a. $t_0 = 25$ et $t_{24} = 19$.
b. $s_0 = -\frac{5}{2}$ et $s_5 = \frac{17}{2}$.
c. $p_0 = 48$ et $p_{37} = 30$.

108 **a.** $u_n = u_0 + rn = 8 - 23n$.
Donc $u_{25} = 8 - 23 \times 25 = -567$.
b. $u_n = u_0 + rn = -19 + 4n$.
Donc $u_{135} = -19 + 4 \times 135 = 521$.
c. $u_n = u_0 + rn = -2 + \frac{1}{3}n$.
Donc $u_{10} = -2 + \frac{1}{3} \times 10 = \frac{4}{3}$.

109 **a.** $u_n = u_1 + r(n-1) = 3 + 2(n-1) = 1 + 2n$.
Donc $u_{21} = 1 + 2 \times 21 = 43$.
b. $u_n = u_1 + r(n-1) = -15 + 9(n-1) = -24 + 9n$.
Donc $u_{14} = -24 + 9 \times 14 = 102$.
c. $u_n = u_1 + r(n-1) = -1 + \frac{1}{2}(n-1) = -\frac{3}{2} + \frac{n}{2}$.
Donc $u_{132} = -\frac{3}{2} + \frac{132}{2} = \frac{129}{2}$.

110 $w_7 = w_0 + 7r$. Donc $15 = -6 + 7r$ et $r = 3$.
D'où $w_1 = w_0 + r$ et $w_1 = -6 + 3 = -3$.

111 **a.** $t_{24} = t_0 + 24r$.
Donc $19 = 25 + 24r$ et $r = -\frac{1}{4}$.
b. $s_5 = s_0 + 5r$.
Donc $\frac{17}{2} = -\frac{5}{2} + 5r$ et $r = \frac{11}{5}$.
c. $p_{37} = p_0 + 37r$.
Donc $30 = 48 + 37r$ et $r = -\frac{18}{37}$.

Exercices 31p85,81p89, 74,75,76,78,84p89

31 Calculer la somme $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 99$.

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 99 = \frac{99 \times (99+1)}{2} = 4950$$

Pour les exercices 81 et 82, indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

81 La somme des 15 premiers entiers naturels non nuls est 240.

$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 15 = \frac{15\times(15+1)}{2} = 120$ affirmation fausse !

74 Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $r = 2$.

1. Exprimer u_n en fonction de n puis calculer le septième terme de cette suite.

2. Étudier les variations de (u_n).

3. Calculer la somme $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{10}$.

Capacité 7, p. 77

1.pour tout entier naturel *n*, on a : $u_n = u_0 + nr = 3 + 2n$.

$u_6 = 3 + 2 \times 6 = 15$.

2. (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 2$. Or $r > 0$. On en déduit que cette suite est croissante.

3. $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2} = nombre\ de\ termes \times \frac{premier\ terme + dernier\ terme}{2}$

$u_0 + u_1 + \cdots + u_{10} = 11 \times \frac{u_0 + u_{10}}{2}$ or $u_{10} = 3 + 2 \times 10 = 23$

$= 11 \times \frac{3 + 23}{2}$

$= 143$

75 Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 13$ et de raison $r = -5$.

1. Exprimer u_n en fonction de n puis calculer le quinzième terme de cette suite.

2. Étudier les variations de (u_n).

3. Calculer la somme $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{12}$.

1.pour tout entier naturel n, on a : $u_n = u_0 + nr = 13 - 5n$.

$u_{14} = 13 - 5 \times 14 = -57$.

2. (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = -5$. Or $r < 0$. On en déduit que cette suite est décroissante.

3. $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2} = nombre\ de\ termes \times \frac{premier\ terme + dernier\ terme}{2}$

$u_0 + u_1 + \cdots + u_{12} = 13 \times \frac{u_0 + u_{12}}{2}$ or $u_{12} = 13 - 5 \times 12 = -47$

$= 13 \times \frac{13-47}{2}$

$= -221$

76 Soit (w_n) une suite arithmétique de premier terme $w_1 = 5$ et de raison $r = -2$.

1. Exprimer w_n en fonction de n puis calculer le dixième terme de cette suite.

2. Étudier les variations de (u_n).

3. Calculer la somme $S = w_1 + w_2 + \ldots + w_{13}$.

1. Pour tout entier naturel n non nul, $w_n = w_1 + r \times (n - 1)$.
Donc $w_n = 5 + (-2) \times (n - 1) = -2n + 7$.
w_{10} est le dixième terme de cette suite. $w_{10} =$ $-2 \times 10 + 7 = -13$
2. La raison de cette suite est strictement négative donc elle est strictement décroissante.
3. Le premier terme de la somme est w_1 et le dernier est w_{13}.
$w_{13} =$ $-2 \times 13 + 7 = -19$
La somme comporte 13 termes.
Donc $S =$ $13 \times \frac{5 - 19}{2} = -91$

78 **QCM** *Choisir la bonne réponse.*

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0, de raison r et $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

	A	B	C
1. Si $u_0 = 2$ et $r = 3$ alors	$u_4 = 7$	$u_4 = 12$	$u_4 = 14$
2. Si $u_1 = -5$ et $u_2 = 2$ alors	$r = 7$	$r = -3$	$r = -7$
3. Si $u_4 = 2$ et $u_5 = 5$ alors	$u_6 = 7$	$u_6 = 8$	$u_6 = 9$
4. Si $u_0 = 3$ et $r = -1$ alors	$S_5 = 5$	$S_5 = 3$	$S_5 = 0$

1. $u_n = u_0 + nr = 2 + 3n \quad u_4 = 14$ réponse C

2. $r = u_2 - u_1 = 7$ réponse A

3. $r = u_5 - u_4 = 3 \qquad u_6 = u_5 + 3 = 8$ réponse B

4. $u_0 + u_1 + \dots + u_5 = 6 \times \frac{u_0 + u_5}{2} \qquad u_n = u_0 + nr = 3 - n \quad u_5 = 3 - 5 = -2$

$= 6 \times \frac{3-2}{2}$

$= 3$ réponse B

84 On veut creuser un puits. Le 1er mètre coûte 100 €, le 2e mètre 120 €, le 3e mètre 140 € et ainsi de suite, en augmentant de 20 € à chaque mètre. On note un le prix du n-ième mètre creusé.

1. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

2. a. Calculer la somme $u_1 + u_2 + \dots + u_{30}$.

b. En déduire le coût d'un puits de 30 mètres de profondeur.

3. On dispose d'un budget de 33 000 €.

Quelle profondeur maximale du puits peut-on creuser ?

1.Lorsque l'on creuse un mètre supplémentaire , le prix augmente de 20 €.

On en déduit que pour tout entier $n \geq 1$, $u_{n+1} = u_n + 20$. (Ou $u_{n+1} - u_n = 20$)
On en déduit que la suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 20$ et de 1er terme $u_1 = 100$.
Il vient alors que pour tout entier naturel n, on a :
$u_n = u_1 + (n-1)r = 100 + 20(n-1) = 100 + 20n - 20 = 80 + 20n$.
2.a)

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_{30} = 30 \times \frac{u_1 + u_{30}}{2} \qquad \text{or} \qquad u_{30} = 80 + 20 \times 30 = 680$$

$$= 30 \times \frac{100+680}{2}$$

$$= 11700$$

b. Un puit de 30 mètres de profondeur coûte 11 700 euros.

3.

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = n \times \frac{u_1 + u_n}{2} = n \times \frac{100+80+20n}{2} = n \times \frac{180+20n}{2} = n(90+10n) = 10n^2 + 90n$$

On résout l'inéquation : $10n^2 + 90n \leq 33\,000$
$10n^2 + 90n \leq 33\,000 \Leftrightarrow 10n^2 + 90n - 33000 \leq 0 \Leftrightarrow n^2 + 9n - 3300 \leq 0$
On doit résoudre étudier le signe de la fonction du second degré $x^2 + 9x - 3300$
$a = 1\,, b = 9 \; et \; c = -3300$
On calcule le discriminant Δ=13 281
Δ>0 .Le polynôme du second degré $x^2 + 9x - 3300$ admet donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-9-\sqrt{13281}}{2} \approx -62{,}12$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-9+\sqrt{13281}}{2} \approx 53{,}12$$

Le polynôme $x^2 + 9x - 3300$ est du signe de $a = 1$ à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x^2 + 9x - 3300$		+	0	-	0	+	

$n^2 + 9n - 3300 \leq 0 \Leftrightarrow n \leq 53{,}12$
On peut creuser au maximum 53 mètres.

Exercice :

Soit (u_n) la suite définie par $u_{n+1} = \frac{9}{6-u_n}$ et $u_0 = -3$.

Soit la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{1}{u_n-3}$.

a)Montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$. (calculer $v_{n+1} - v_n$)

b)En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

a) Pour tout entier naturel ,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}-3} - \frac{1}{u_n-3}$$
$$= \frac{1}{\frac{9}{6-u_n}-3} - \frac{1}{u_n-3}$$
$$= \frac{1}{\frac{9}{6-u_n}-\frac{3(6-u_n)}{6-u_n}} - \frac{1}{u_n-3}$$
$$= \frac{1}{\frac{9-18+3u_n}{6-u_n}} - \frac{1}{u_n-3}$$
$$= \frac{6-u_n}{3u_n-9} - \frac{1}{u_n-3}$$
$$= \frac{6-u_n}{3(u_n-3)} - \frac{3}{3(u_n-3)}$$
$$= \frac{6-u_n-3}{3(u_n-3)}$$
$$= \frac{3-u_n}{3(u_n-3)}$$
$$= \frac{-(u_n-3)}{3(u_n-3)}$$
$$= \frac{-1}{3}$$

La différence entre un terme et son précédent reste constante et égale à $\frac{-1}{3}$.

(v_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{-1}{3}$ de premier terme $v_0 = \frac{1}{u_0-3} = \frac{1}{-3-3} = -\frac{1}{6}$

b)pour tout entier naturel n, on a : $v_n = v_0 + nr = -\frac{1}{6} - \frac{1}{3}n = \frac{-1-2n}{6}$

$v_n = \frac{1}{u_n-3}$

On en déduit que $\frac{1}{u_n-3} = \frac{-1-2n}{6}$

soit $u_n - 3 = \frac{6}{-1-2n}$

soit $u_n = 3 + \frac{6}{-1-2n} = \frac{3(1+2n)}{1+2n} - \frac{6}{1+2n} = \frac{3+6n-6}{1+2n} = \frac{-3+6n}{1+2n}$

Exercices 35,36,37,38p85 ,112,113,114p95

35 Soit (w_n) la suite géométrique de premier terme $w_0 = 2$ et de raison 5.

a. Déterminer w_1, w_2 et w_3.

b. Expliquer pourquoi pour tout entier naturel n, $w_n = 2 \times 5^n$.

a) $w_1 = 5 \times w_0 = 10$ $w_2 = 5 \times w_1 = 50$ $w_3 = 5 \times w_2 = 250$

b) pour tout entier naturel n, on a : $w_n = w_0 \times q^n = 2 \times 5^n$

36 Soit (t_n) la suite géométrique de premier terme $t_1 = 6$ et de raison -3.

a. Déterminer t_2, t_3 et t_4.

b. Justifier que pour tout entier $n \geqslant 1$, $t_n = 6 \times (-3)^{n-1}$.

a) $t_2 = -3 \times t_1 = -18$ $t_3 = -3 \times t_2 = 54$ $t_4 = -3 \times t_3 = -162$

b) pour tout entier naturel *n non nul*, on a : $t_n = t_1 \times q^{n-1} = 6 \times (-3)^{n-1}$

37 Soit (u_n) une suite géométrique telle que $u_4 = 6$ et $u_5 = 12$. Déterminer la raison de (u_n).

(u_n) est une suite géométrique de raison q donc $u_5 = q \times u_4$.
D'où : $12 = q \times 6$ et $q = 2$.

38 Soit (v_n) telle que pour tout entier naturel n, $v_n \neq 0$ et $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 5$. (v_n) est-elle une suite géométrique ?

Le rapport entre un terme et son précédent reste constante et égale à 5.
(v_n) est donc une suite géométrique de raison 5.

Parcours 2 : Obtenir et utiliser le terme général d'une suite géométrique

112 On considère la suite géométrique (v_n) de premier terme v_0 et de raison q.
Déterminer l'expression du terme général v_n puis calculer le terme demandé à 0,1 près.

a. $v_0 = 25$ et $q = 2$. Calculer v_{13}.
b. $v_0 = 4\,000$ et $q = 0{,}8$. Calculer v_{22}.
c. $v_0 = 384$ et $q = \frac{1}{2}$. Calculer v_6.

113 On considère la suite géométrique (v_n) de premier terme v_1 et de raison q.
Déterminer l'expression du terme général v_n, puis calculer le terme demandé à 0,1 près.

a. $v_1 = 3$ et $q = 2$. Calculer v_{10}.
b. $v_1 = 10\,000$ et $q = 0{,}5$. Calculer v_{15}.
c. $v_1 = 2$ et $q = 1{,}01$. Calculer v_{500}.

Ces exercices sont d'un niveau plus élevé.

114 (a_n) est la suite géométrique de raison q telle que $a_0 = 7$ et $a_3 = -1\,512$, calculer q puis a_7.
MÉTHODE : On peut écrire $a_3 = a_0 \times q^3$. En déduire q.

115 Les suites (u_n) et (v_n) sont des suites géométriques de raisons positives.
En utilisant la méthode précédente, calculer la raison de chacune de ces suites sachant que :

a. $u_0 = 2$ et $u_2 = \frac{9}{2}$.
b. $v_0 = 16$ et $v_4 = 0{,}0256$.

112 **a.** $v_n = v_0 \times q^n = 25 \times 2^n$.
Donc $v_{13} = 25 \times 2^{13} = 204\,800$.
b. $v_n = v_0 \times q^n = 4\,000 \times 0{,}8^n$.
Donc $v_{22} = 4\,000 \times 0{,}8^{22} \approx 29{,}5$.
c. $v_n = v_0 \times q^n = 384 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
Donc $v_6 = 384 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 6$.

113 **a.** $v_n = v_1 \times q^{n-1} = 3 \times 2^{n-1}$.
Donc $v_{10} = 3 \times 2^9 = 1\,536$.
b. $v_n = v_1 \times q^{n-1} = 10\,000 \times 0{,}5^{n-1}$.
Donc $v_{15} = 10\,000 \times 0{,}5^{14} \approx 0{,}6$.
c. $v_n = v_1 \times q^{n-1} = 2 \times 1{,}01^{n-1}$.
Donc $v_{500} = 2 \times 1{,}01^{499} \approx 286{,}7$.

114 $a_3 = a_0 \times q^3$ donc $-1\,512 = 7 \times q^3$.
On obtient : $q^3 = -\frac{1512}{7} = -216$.
Donc $q = -6$.
D'où $a_7 = a_0 \times q^7 = 7 \times (-6)^7 = -1\,959\,552$.

115 **a.** $u_2 = u_0 \times q^2$ donc $\frac{9}{2} = 2 \times q^2$.
On obtient : $q^2 = \frac{9}{4}$. Donc $q = \frac{3}{2}$.
b. $v_4 = v_0 \times q^4$ donc $0{,}0256 = 16 \times q^4$.
On obtient : $q^4 = \frac{0{,}0256}{16}$. Donc $q = 0.2$

Exercices 39p85,89,90,91,92,93,95,96,98,100,102p90-91

39 Calculer $S = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{3}\right)^{12}$.

$1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^{12} = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{12+1}}{1-\frac{1}{3}}$ $\quad 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ (q≠1)

$$= \frac{1-\frac{1}{1\,594\,323}}{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{1-\frac{1}{1\,594\,323}}{\frac{2}{3}}$$

$$= \left(\frac{1\,594\,323}{1\,594\,323} - \frac{1}{1\,594\,323}\right) \times \frac{3}{2}$$

$$= \frac{797\,161}{531\,441}$$

89 Soit (v_n) la suite géométrique de premier terme $v_0 = 2$ et de raison $q = 3$.

1. Exprimer v_n en fonction de n et calculer le dixième terme de cette suite.

2. Étudier les variations de (v_n).

3. a. Calculer la somme $S = v_0 + v_1 + \ldots + v_8$.

b. Calculer la somme $S' = v_1 + v_2 + \ldots + v_9$.

Capacité 9, p. 79

1. pour tout entier naturel n, on a : $v_n = v_0 \times q^n = 2 \times 3^n$

$v_9 = 2 \times 3^9 = 39\,366$

2.Comme $v_0 > 0$ et $q = 3 > 1$ alors la suite (v_n) est croissante.

(on pour aussi étudier le signe de $v_{n+1} - v_n$:

pour tout entier naturel n, on a :

$v_{n+1} - v_n = 2 \times 3^{n+1} - 2 \times 3^n = 2 \times 3^n \times 3 - 2 \times 3^n = 6 \times 3^n - 2 \times 3^n = 4 \times 3^n$

4>0 $3^n > 0$. On en déduit que $v_{n+1} - v_n > 0$ et donc que la suite (v_n) est croissante)

3.a) $v_0 + v_1 + \cdots + v_8 = \frac{v_0 - v_9}{1-q} = \frac{2-39366}{1-3} = 19682$ $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{u_0 - u_{n+1}}{1-q}$

b) $v_1 + \cdots + v_9 = \frac{v_1 - v_{10}}{1-q} = \frac{6-39366\times 3}{1-3} = 59046$

90 Soit (v_n) la suite géométrique de premier terme $v_0 = 3$ et de raison $q = -2$.

1. Exprimer v_n en fonction de n.

2. Étudier les variations de (v_n).

3. Calculer la somme $S = v_0 + v_1 + \ldots + v_{10}$.

1. pour tout entier naturel n, on a : $v_n = v_0 \times q^n = 3 \times (-2)^n$ $v_{11} = 3 \times (-2)^{11} = -6144$

2.Comme $q < 0$ alors les termes de la suite changent alternativement de signe.

La suite (v_n) n'est donc pas monotone.

3. $v_0 + v_1 + \cdots + v_{10} = \frac{v_0 - v_{11}}{1-q} = \frac{3-(-6144)}{1-(-2)} = 2049$

91 Soit (w_n) la suite géométrique de premier terme $w_1 = -\frac{1}{2}$ et de raison $q = 3$.

1. Exprimer w_n en fonction de n.

2. Étudier les variations de (w_n).

3. Calculer la somme $S = w_1 + w_2 + \ldots + w_{12}$.

1. Pour tout entier naturel n non nul, $w_n = w_1 \times q^{n-1}$. Donc $w_n = -\frac{1}{2} \times 3^{n-1}$.

2. Le premier terme est strictement négatif et la raison est strictement positive donc la suite est strictement décroissante.

3.$w_{13} = -\frac{1}{2} \times 3^{12} = -\frac{531\,441}{2}$

$w_1 + \cdots + w_{12} = \frac{w_1 - w_{13}}{1-q} = \frac{-\frac{1}{2} - (-\frac{531\,441}{2})}{1-3} = -132\,860$

92 Soit (w_n) la suite géométrique de premier terme $w_1 = 4$ et de raison $q = \frac{1}{3}$.

1. Exprimer w_n en fonction de n.

2. Étudier les variations de (w_n).

3. Calculer la somme $S = w_1 + w_2 + \ldots + w_{10}$.

1.pour tout entier naturel *n non nul*, on a : $w_n = w_1 \times q^{n-1} = 4 \times (\frac{1}{3})^{n-1}$

$$w_{11} = 4 \times (\frac{1}{3})^{10} = \frac{4}{59049}$$

2. Comme $w_1 > 0$ et $0 < q < 1$ alors la suite (w_n) est décroissante.

(on pour aussi étudier le signe de $w_{n+1} - w_n$:

pour tout entier naturel *n non nul*, on a :

$$w_{n+1} - w_n = 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1-1} - 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$= 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n} - 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \qquad \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$$

$$= 4 \times (\frac{1}{3})^{n} - 12 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

$$= -8 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

-8<0 $\left(\frac{1}{3}\right)^{n} > 0$. On en déduit que $w_{n+1} - w_n < 0$ et donc que la suite (w_n) est décroissante.)

3. $w_1 + \cdots + w_{10} = \frac{w_1 - w_{11}}{1-q} = \frac{4 - \frac{4}{59049}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{236\ 192}{59\ 049} \times \frac{3}{2} = \frac{118\ 096}{19\ 683}$

93 Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_1 = 5$ et de raison $q = 3$.

1. Déterminer la somme $S = u_1 + u_2 + \ldots + u_8$.

2. Déterminer la somme $S' = u_9 + \ldots + u_{15}$.

1.pour tout entier naturel *n non nul*, on a : $u_n = u_1 \times q^{n-1} = 5 \times 3^{n-1}$

$$u_9 = 5 \times 3^8 = 32\ 805 \qquad u_{16} = 5 \times 3^{15} = 71\ 744\ 535$$

2. $u_1 + \cdots + u_8 = \frac{u_1 - u_9}{1-q} = \frac{5 - 32\ 805}{1-3} = 16\ 400$

$$u_9 + \cdots + u_{15} = \frac{u_9 - u_{16}}{1-q} = \frac{32\ 805 - 71\ 744\ 535}{1-3} = 35\ 855\ 865$$

95 CALC Un globetrotter a parié qu'il pouvait parcourir 5 000 km à pied. Il peut, frais et dispo, parcourir 50 km en une journée, mais chaque jour, la fatigue s'accumule et donc sa performance diminue de 1 % tous les jours.
On notera d_n la distance parcourue durant le n-ième jour.

1. a. Calculer les distances d_1, d_2 et d_3.

b. Donner l'expression de d_{n+1} en fonction de d_n.

c. En déduire la nature de la suite (d_n) et l'expression de d_n en fonction de n.

2. Calculer, en fonction de n, le nombre total L_n de kilomètres parcourus au bout de n jours.

3. Justifier que $L_n < 5\,000$ pour tout n. Que dire du pari du globetrotter ?

4. À l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre minimal de jours N qui lui seraient nécessaires pour parcourir 4 999 km.

95.

1.a)Diminuer de 1% revient à multiplier par $1 - \frac{1}{100} = 0{,}99$

Ainsi $d_1 = 50$ $\quad d_2 = 0{,}99 \times d_1 = 49{,}5$ $\quad d_3 = 0{,}99 \times d_2 = 49{,}005$

b)pour tout entier naturel *n non nul* on a : $d_{n+1} = 0{,}99 \times d_n$

c)On en déduit que la suite (d_n) est géométrique de 1er terme $d_1 = 50$ de raison $q = 0{,}99$

Pour tout entier naturel *n non nul*, on a : $d_n = d_1 \times q^{n-1} = 50 \times 0{,}99^{n-1}$

2.pour tout entier naturel *n non nul*, on a :

$$\begin{aligned} L_n &= d_1 + \cdots + d_n \\ &= \frac{d_1 - d_{n+1}}{1-q} \\ &= \frac{50 - 50 \times 0{,}99^n}{1 - 0{,}99} \\ &= 100 \times (50 - 50 \times 0{,}99^n) \\ &= 5000 - 5000 \times 0{,}99^n \end{aligned}$$

3. pour tout entier naturel *n non nul*, on a :

$-5000 \times 0{,}99^n < 0$ donc $5000 - 5000 \times 0{,}99^n < 5000$ et $L_n < 5000$

Le pari du globetrotter est donc perdu !

4. $L_{847} = 5000 - 5000 \times 0{,}99^{847} = 4998{,}995$

$L_{848} = 5000 - 5000 \times 0{,}99^{848} = 4999{,}005$

Il lui faut 848 jours pour dépasser 4999 kms.

96 Une entreprise de sécurité lance un nouveau système d'alarme. La première semaine 2 000 unités seront produites puis la production augmentera chaque semaine de 10 %. On désigne par u_n, le nombre de systèmes fabriqués la n-ième semaine. On arrondira les résultats à l'unité.

1. Donner u_1. Calculer u_2, u_3 et u_4.

2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n pour tout entier naturel n. Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

3. Exprimer u_n en fonction de n.

4. Calculer la production totale au cours des 20 premières semaines.

Capacité 10, p. 79

96

1.Augmenter de 10% revient à multiplier par $1+\frac{10}{100}=1{,}10$

Ainsi $u_1=2000$ $\quad u_2=1{,}10\times u_1=2200$ $\quad u_3=2420$ $\quad u_4=2662$

2.pour tout entier naturel *n non nul* on a : $u_{n+1}=1{,}10\times u_n$

On en déduit que la suite (u_n) est géométrique de 1er terme $u_1=2000$ de raison $q=1{,}10$

3.Pour tout entier naturel *n non nul*, on a : $u_n=u_1\times q^{n-1}=2000\times 1{,}10^{n-1}$

4. S= $u_1+\cdots+u_{20}=\frac{u_1-u_{21}}{1-q}=\frac{2000-2000\times 1{,}10^{20}}{1-1{,}10}\approx 114\,550$

La production totale au cours des 20 premières années est d'environ 114 550 unités.

RETOUR SUR L'OUVERTURE DU CHAPITRE

98 La légende de Sissa

Sissa a demandé qu'on lui offre un grain de riz pour la première case de l'échiquier, puis deux pour la deuxième case, en doublant ainsi la quantité de grains jusqu'à la 64e case. On appelle (u_n) la suite donnant le nombre de grains de riz sur la n-ième case pour tout entier naturel n.

1. a. Donner u_1.
b. Écrire u_{n+1} en fonction de u_n pour tout entier naturel n.
c. Que peut-on en déduire sur la suite (u_n) ?

2. Exprimer u_n en fonction de n.

3. Calculer la masse de riz que Sissa aurait pu obtenir.

4. La production mondiale de riz est estimée par la FAO à 513 millions de tonnes en 2019. Le poids moyen d'un grain de riz est de 0,04 g.
Utiliser les informations données pour expliquer la remarque du conseiller.

LE SAVIEZ-VOUS

La FAO (Organisation des Nations Unies pour l'Alimentation et l'Agriculture) dont le siège se trouve à Rome compte 197 pays et a pour objectif de libérer le monde de la faim. Sa devise latine signifie « Qu'il y ait du pain (pour tous) »

98 **1. a.** $u_1 = 1$.

b. $u_{n+1} = 2 \times u_n$ pour tout entier naturel n non nul.

c. La suite est géométrique de raison 2.

2. $u_n = 2^{n-1}$ pour tout entier naturel n non nul.

3.S= $1 + 2 + \ldots + 2^{63} = \frac{1-2^{64}}{1-2} \approx 1{,}84 \times 10^{19}$
Sissa aurait obtenu $1{,}84 \times 10^{19}$ grains de blé soit $7{,}38 \times 10^{17}\,grammes\ de\ blé$
Soit $7{,}38 \times 10^{11}$ tonnes de blé soit 738 000 millions de tonnes de blé soit plus de 1000 fois la production mondiale de riz en 2019…

100 PROG Compléter un algorithme

On considère la suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison 7. Compléter le programme ci-contre afin que la fonction Python retourne la somme $u_0 + \ldots + u_{100}$.

```
def suite_somme():
    U=5
    S=...
    for i in range(...,...):
        U=...
        S=...
    return(S)
```

```
def suite():
    U=5
    S=U
    for i in range(   1,101) :
        U=7*U
        S=S+U
    return(S)
```

102 TABLEUR CHERCHER COMMUNIQUER

Soit (u_n) une suite définie pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 1 \text{ et } u_0 = 0.$$

1. a. Calculer $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_{100}$ dans un tableur.

b. Conjecturer la limite de (u_n).

c. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?

2. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 2$.

a. En exprimant v_{n+1} en fonction de v_n pour tout entier naturel n, démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b. Donner l'expression de v_n en fonction de n.

c. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

3. a. À l'aide d'un programme ou du tableur, calculer des termes de la suite (v_n) pour de grandes valeurs de n.

b. Quelle conjecture peut-on faire concernant la limite de la suite (v_n) ? Cette deuxième conjecture semble-t-elle cohérente avec celle faite à la question **1.b.** ?

n	un	un+1-un	un+1/un	vn=un-2	vn+1/vn
0	0			-2	
1	1	1		-1	0,5
2	1,5	0,5	1,5	-0,5	0,5
3	1,75	0,25	1,16666667	-0,25	0,5
4	1,875	0,125	1,07142857	-0,125	0,5
5	1,9375	0,0625	1,03333333	-0,0625	0,5
6	1,96875	0,03125	1,01612903	-0,03125	0,5
7	1,984375	0,015625	1,00793651	-0,015625	0,5
8	1,9921875	0,0078125	1,00393701	-0,0078125	0,5
9	1,99609375	0,00390625	1,00196078	-0,00390625	0,5
10	1,99804688	0,00195313	1,00097847	-0,00195313	0,5
11	1,99902344	0,00097656	1,00048876	-0,00097656	0,5
12	1,99951172	0,00048828	1,00024426	-0,00048828	0,5
13	1,99975586	0,00024414	1,0001221	-0,00024414	0,5
14	1,99987793	0,00012207	1,00006104	-0,00012207	0,5
15	1,99993896	6,1035E-05	1,00003052	-6,1035E-05	0,5
16	1,99996948	3,0518E-05	1,00001526	-3,0518E-05	0,5
17	1,99998474	1,5259E-05	1,00000763	-1,5259E-05	0,5
18	1,99999237	7,6294E-06	1,00000381	-7,6294E-06	0,5
19	1,99999619	3,8147E-06	1,00000191	-3,8147E-06	0,5
20	1,99999809	1,9073E-06	1,00000095	-1,9073E-06	0,5
21	1,99999905	9,5367E-07	1,00000048	-9,5367E-07	0,5
22	1,99999952	4,7684E-07	1,00000024	-4,7684E-07	0,5
23	1,99999976	2,3842E-07	1,00000012	-2,3842E-07	0,5
24	1,99999988	1,1921E-07	1,00000006	-1,1921E-07	0,5
25	1,99999994	5,9605E-08	1,00000003	-5,9605E-08	0,5
26	1,99999997	2,9802E-08	1,00000001	-2,9802E-08	0,5

b. On conjecture que le limite de la suite est 2.

c. La suite n'est ni arithmétique, ni géométrique.

D'après les colonnes C et D , $u_{n+1} - u_n$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ n'est pas constant.

2a)

Pour tout entier n, $v_n = u_n - 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$

Démontrons que la suite (v_n) est géométrique.

Pour tout entier n,

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}u_n + 1 - 2 = \frac{1}{2}u_n - 1 = \frac{1}{2}(u_n - 2) = \frac{1}{2}v_n$$

Autre méthode :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1}-2}{u_n-2} = \frac{\frac{1}{2}u_n+1-2}{u_n-2} = \frac{\frac{1}{2}u_n-1}{u_n-2} = \frac{\frac{1}{2}(u_n-2)}{u_n-2} = \frac{1}{2}$$

On en déduit que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de 1er terme $v_0 = u_0 - 2 = 0 - 2 = -2$

b) pour tout entier naturel n, on a : $v_n = v_0 \times q^n = -2 \times 0{,}5^n$

c) pour tout entier naturel n, on a : $v_n = u_n - 2$

$u_n - 2 = -2 \times 0{,}5^n$ soit $u_n = 2 - 2 \times 0{,}5^n$

3.a) cf tableur

b. On conjecture que la suite tend vers 0.
Cette conjecture est cohérente avec celle faite précédemment car $2 - 2 = 0$.