

Rituels de calcul : ex10p50, résoudre les équations $x^2 = 16$, $4x^2 - 5 = 0$, $x^2 + 8 = 0$

10 Développer et réduire les expressions suivantes.

a. $(x-8)(4-2x)$ b. $-x(7x+3)$ c. $2x+5(4x+2)$

$$(x-8)(4-2x) = 4x - 2x^2 - 32 + 16x = -2x^2 + 20x - 32$$

$$-x(7x+3) = -7x^2 - 3x$$

$$2x + 5(4x+2) = 2x + 20x + 10 = 22x + 10 \quad \text{non traité}$$

$$x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \sqrt{16} = 4 \text{ ou } x = -\sqrt{16} = -4 \quad S = \{-4; 4\}$$

$$4x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{5}{4}} = -\frac{\sqrt{5}}{2} \quad S = \left\{ \frac{\sqrt{5}}{2}; \frac{\sqrt{5}}{2} \right\}$$

$$x^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -8 \quad \text{impossible} \quad S = \emptyset$$

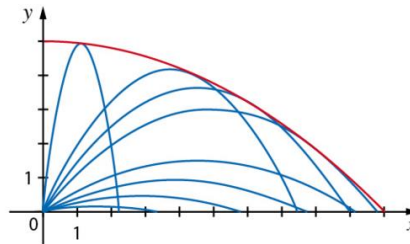
Activité 1 – p38

La parabole de sûreté

En balistique, on désigne par **parabole de sûreté** la courbe qui « recouvre » toutes les trajectoires paraboliques possibles d'un obus lancé depuis un point O donné avec une vitesse donnée dans un plan vertical.

Aucun point en dehors de cette courbe ne peut être atteint par un obus ayant cette vitesse initiale : la zone est « sûre », d'où le nom de la courbe.

Cette courbe est une parabole, représentation graphique dans un repère d'origine O de la fonction f telle que $f(x) = -\frac{1}{4h}x^2 + h$, où h est l'altitude maximale pouvant être atteinte par le projectile.



1 On suppose que $h = 200$ m.

Calculer $f(400)$. Interpréter le résultat trouvé.

2 On suppose que $h = 100$ m.

a. Montrer que $f(x)$ s'écrit sous forme factorisée : $f(x) = \frac{1}{400}(x+200)(-x+200)$.

b. Quelle est la portée maximale horizontale de l'obus ? Quelles en sont les conséquences pour l'assaillant ?

c. On suppose à présent que le canon se trouve sur une citadelle située 125 mètres au-dessus de la plaine. Où doivent alors se placer les assaillants pour être en sûreté ?

$$1. f(x) = -\frac{1}{800}x^2 + 200$$

$$f(400) = -\frac{1}{800} \times 400^2 + 200 = 0$$

La portée maximale horizontale de l'obus est de 400 mètres. Pour être en sécurité, l'assaillant doit se

trouver à plus de 200 mètres 2a) $f(x) = -\frac{1}{400}x^2 + 100$

$$\begin{aligned} \frac{1}{400}(x+200)(-x+200) &= \frac{1}{400}(-x^2 + 200x - 200x + 200^2) \\ &= \frac{1}{400}(-x^2 + 40\,000) \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{400}x^2 + \frac{40\,000}{400}$$

$$= -\frac{1}{400}x^2 + 100$$

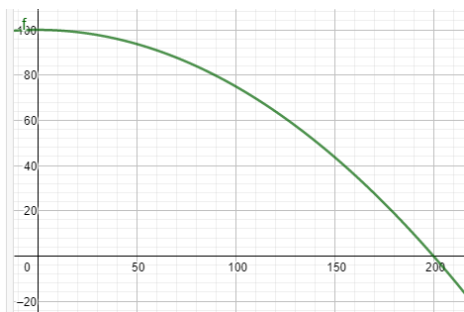
$$= f(x)$$

b) On résout $f(x) = 0$.

$$\frac{1}{400}(x+200)(-x+200) = 0 \quad \text{équivalent à} \quad x+200 = 0 \text{ ou } -x+200 = 0$$

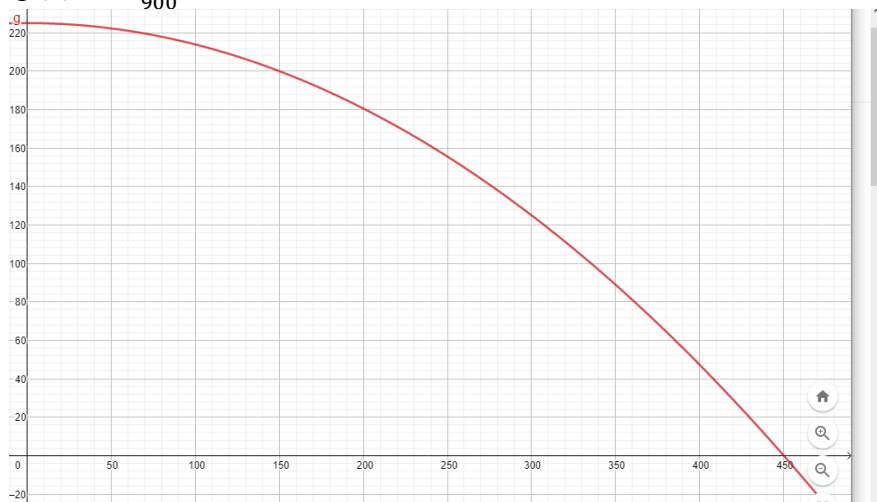
$$\text{équivalent à} \quad x = -200 \text{ (pas de sens) ou } x = 200$$

$S = \{200\}$. La portée maximale horizontale de l'obus est de 200 mètres. Pour être en sécurité, l'assaillant doit se trouver à plus de 200 mètres.



c) L'altitude maximale de l'obus est à présent de 225m

$$g(x) = -\frac{1}{900}x^2 + 225$$



La courbe de g modélise la trajectoire de l'obus lorsque le canon est sur une citadelle située 125 mètres au-dessus du champ de bataille.

Pour connaître la zone de sûreté, on résout l'équation

$$g(x) = 0$$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{900}x^2 + 225 = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{900}x^2 = -225$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 225 \times 900$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 202\,500$$

$$\Leftrightarrow x = 450 \text{ ou } -450$$

(-450 est une valeur hors contexte)

Pour être en sûreté, il faut se situer à plus de 450 mètres du point O.

13 On donne ci-dessous l'expression de fonctions polynômes du second degré sous forme factorisée. Dans chaque cas, déterminer leurs racines.

- a. $f(x) = (x - 5)(x + 9)$ b. $g(x) = 3(x + 7)(-x + 11)$
 c. $h(x) = x(x - 45)$ d. $k(x) = -4(x + 6)(x - 501)$

14 Écrire l'expression sous forme factorisée d'une fonction polynôme du second degré de racines 6 et 9.

15 La fonction polynôme du second degré d'expression $f(x) = x^2 - 7x + 5$ a deux racines distinctes. Donner la somme et le produit de ces racines.

16 Les équations suivantes ont deux racines distinctes. Donner leur somme et leur produit.

- a. $x^2 + 5x - 11 = 0$ b. $2x^2 - x - 89 = 0$
 c. $-3x^2 + 7x + 20 = 0$ d. $-x^2 - 9x + 17 = 0$

13

- a. $x = -9$ ou $x = 5$
 b. $x = -7$ ou $x = 11$
 c. $x = 0$ ou $x = 45$
 d. $x = -6$ ou $x = 501$

14 D'après une propriété du cours, une expression sous forme factorisée d'une fonction polynôme de racines 6 et 9 est : $f(x) = a(x - 6)(x - 9)$, où a est un réel non nul.

- 45** 1. Déterminer les fonctions polynômes du second degré s'annulant en 2 et en -8.
 2. Déterminer la fonction polynôme du second degré f s'annulant en $-\frac{1}{2}$ et 5 et telle que $f(0) = -10$.
 3. Déterminer la fonction polynôme du second degré g de racines 3 et 8 et telle que $g(6) = 12$.

Capacité 2, p. 41

1. Les fonctions polynômes du second degré s'annulant en 2 et -8 sont de la forme $f(x) = a(x - 2)(x - (-8)) = a(x - 2)(x + 8)$ où a est un réel non nul.

2. Les fonctions polynômes du second degré s'annulant en $-\frac{1}{2}$ et 5 sont de la forme $f(x) = a\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 5)$ où a est un réel non nul.

$$f(0) = -10, \text{ donc } a\left(0 + \frac{1}{2}\right)(0 - 5) = -10 \text{ soit } -\frac{5}{2}a = -10$$

$$\text{On trouve donc } a = \frac{-10}{-\frac{5}{2}} = -10 \times -\frac{2}{5} = 4.$$

$$f(x) = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 5).$$

3. Les fonctions polynômes du second degré s'annulant en 3 et 8 sont de la forme $g(x) = a(x - 3)(x - 8)$ où a est un réel non nul.

$$g(6) = 12, \text{ donc } a(6 - 3)(6 - 8) = 12 \text{ soit } -6a = 12$$

$$\text{On trouve donc } a = \frac{-12}{6} = -2.$$

$$g(x) = -2(x - 3)(x - 8).$$

16

a. $x_1 + x_2 = -5$ et $x_1 \times x_2 = -11$

b. $x_1 + x_2 = \frac{1}{2}$ et $x_1 \times x_2 = -\frac{89}{2}$

c. $x_1 + x_2 = \frac{7}{3}$ et $x_1 \times x_2 = -\frac{20}{3}$

d. $x_1 + x_2 = -9$ et $x_1 \times x_2 = -17$

15 $x_1 + x_2 = 7$ et $x_1 \times x_2 = 5$

44 1. Déterminer le réel c de telle sorte que le réel -3 soit solution de l'équation $2x^2 - 5x + c = 0$.2. Sachant que l'équation précédente admet une autre solution distincte de -3 , déterminer cette deuxième solution.

PISTE : Utiliser le produit des racines.

$$1. 2(-3)^2 - 5 \times (-3) + c = 0$$

Soit $18 + 15 + c = 0$

Soit $c = -33$

2. On a $P = \frac{c}{a}$. Soit encore $-3 \times x_2 = -\frac{33}{2}$.

On en déduit que $x_2 = \frac{11}{2}$

Exercices 17, 18p50, 41, 42 et **43** page 52**17** La fonction polynôme du second degré f telle que $f(x) = 2x^2 + 2x - 12$ a pour racines -3 et 2 .

Recopier et compléter le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$f(x)$		...	0	...	0	...	

18 La fonction polynôme du second degré g telle que $g(x) = -3x^2 + 12x + 15$ a pour racines -1 et 5 .

Recopier et compléter le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
$g(x)$		...	0	...	0	...	

17

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$f(x)$		+	0	-	0	+	

18

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
$g(x)$		-	0	+	0	-	

41 Soit f et g les fonctions polynômes du second degré définies sur $\mathbb{R}$ de la façon suivante :

$$f(x) = (-2x + 1)(x - 10) \text{ et } g(x) = (x + 4)(x + 6).$$

1. Étudier le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x .
2. Étudier le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x .
3. Résoudre les inéquations $f(x) > 0$ et $g(x) \geq 0$.

Capacité 1, p. 41

1. $f(x) = -2 \left(x - \frac{1}{2} \right) (x - 10)$ (on factorise par -2 dans l'expression $-2x + 1$)

f est un polynôme du second degré dont les racines sont $\frac{1}{2}$ et 10 et le coefficient $a = -2$.

f est du signe de a à l'extérieur des racines.

On en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	10	$+\infty$	
$f(x)$	-	0	+	0	-

$f(x) > 0$ sur l'intervalle $]\frac{1}{2}; 10[$.

$f(x) < 0$ sur l'intervalle $] -\infty; \frac{1}{2}[\cup]10; +\infty[$.

$f(x)$ s'annule en $\frac{1}{2}$ et 10

2. $g(x) = 1(x + 4)(x + 6)$

g est un polynôme du second degré dont les racines sont -4 et -6 et le coefficient $a = 1$.

g est du signe de a à l'extérieur des racines. On en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$	-6	-4	$+\infty$	
$g(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$g(x) > 0$ sur l'intervalle $] -\infty; -6[\cup] -4; +\infty[$.

$g(x) < 0$ sur l'intervalle $] -6; -4[$.

$g(x)$ s'annule en -6 et -4

3.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	10	$+\infty$	
$f(x)$	-	0	+	0	-

$]\frac{1}{2}; 10[$. $S =]\frac{1}{2}; 10[$.

L'inéquation $f(x) > 0$ a pour solution

x	$-\infty$	-6	-4	$+\infty$	
$g(x)$	+	0	-	0	+

L'inéquation $g(x) \geq 0$ a pour solution $] -\infty; -6] \cup [-4; +\infty[$. $S =] -\infty; -6] \cup [-4; +\infty[$.

42 Soit f et g les fonctions polynômes du second degré définies sur $\mathbb{R}$ de la façon suivante :

$$f(x) = (5x + 3)(7 - x) \text{ et } g(x) = (x - 2)(3x + 12).$$

1. Étudier le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x .

2. Étudier le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x .

3. Résoudre les inéquations $f(x) \leq 0$ et $g(x) < 0$.

1. $f(x) = (5x + 3)(7 - x)$

$$= 5 \left(x + \frac{3}{5} \right) (-1)(x - 7) \quad (\text{on factorise par 5 dans l'expression } 5x + 3 \text{ et par } (-1) \text{ dans } 7 - x)$$

$$= -5 \left(x + \frac{3}{5} \right) (x - 7)$$

f est un polynôme du second degré dont les racines sont $-\frac{3}{5}$ et 7 et le coefficient $a = -5$.

f est du signe de a à l'extérieur des racines. On en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$	$-\frac{3}{5}$	7	$+\infty$	
$f(x)$	-	0	+	0	-

$f(x) > 0$ sur l'intervalle $]-\frac{3}{5}; 7[$.

$f(x) < 0$ sur l'intervalle $]-\infty; -\frac{3}{5}[\cup]7; +\infty[$.

$f(x)$ s'annule en $-\frac{3}{5}$ et 7.

2. $g(x) = (x - 2)(3x + 12)$

$$= 3(x - 2)(x + 4) \quad (\text{on factorise par 3 dans l'expression } 3x + 12)$$

g est un polynôme du second degré dont les racines sont 2 et -4 et le coefficient $a = 3$.

g est du signe de a à l'extérieur des racines. On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	-4	2	$+\infty$	
$g(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$g(x) > 0$ sur l'intervalle $]-\infty; -4[\cup]2; +\infty[$.

$g(x) < 0$ sur l'intervalle $]-4; 2[$.

$g(x)$ s'annule en -4 et 2

3.

x	$-\infty$	$-\frac{3}{5}$	7	$+\infty$	
$f(x)$	-	0	+	0	-

L'inéquation $f(x) \leq 0$ a pour solution $]-\infty; -\frac{3}{5}[\cup]7; +\infty[$.

$$S =]-\infty; -\frac{3}{5}[\cup]7; +\infty[$$

x	$-\infty$	-4	2	$+\infty$	
$g(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

L'inéquation $g(x) < 0$ a pour solution $] - 4; -2[$. $S =] - 4; -2[$

43 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x + 1)(2x + 7) + (x + 1)(x + 2).$$

1. Factoriser $f(x)$ et en déduire son tableau de signes.

2. Résoudre l'inéquation $f(x) < 0$.

$$\begin{aligned} 1. f(x) &= (x + 1)(2x + 7) + (x + 1)(x + 2) \\ &= (x + 1)(2x + 7 + x + 2) \\ &= (x + 1)(3x + 9) \\ &= 3(x + 1)(x + 3) \end{aligned}$$

f est un polynôme du second degré dont les racines sont -1 et -3 et le coefficient $a = 3$.

f est du signe de a à l'extérieur des racines. On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	-3	-1	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$f(x) > 0$ sur l'intervalle $] - \infty; -3[\cup] - 1; +\infty[$.

$f(x) < 0$ sur l'intervalle $] - 3; -1[$.

$f(x)$ s'annule en -3 et -1

2. L'inéquation $f(x) < 0$ a pour solution $] - 3; -1[$. $S =] - 3; -1[$

Activité 2p38 la méthode d'Al-Khwarizmi

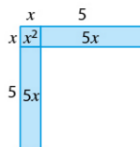
La méthode d'Al-Khwārizmī

1 On se propose de résoudre l'équation du second degré (E) : $x^2 + 10x = 39$.
Voici la méthode proposée par Al-Khwārizmī.

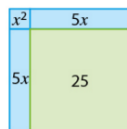
Étape 1 : on suppose que x est positif et on construit un carré de côté x .

x 

Étape 2 : on borde ce carré de deux rectangles dont l'aire respective vaut $\frac{10}{2} \times x$.
On obtient ainsi 5 comme autre dimension.



Étape 3 : on complète alors le grand carré.



a. Exprimer l'aire de la surface colorée en bleu de deux façons différentes et en déduire que :

$$x^2 + 10x = (x + 5)^2 - 25.$$

b. En déduire que résoudre l'équation (E) revient à résoudre l'équation $(x + 5)^2 = 64$.
Déterminer alors la solution positive de l'équation (E).

Al-Khwārizmī ne parle pas de l'autre solution de cette équation car pour lui 64 n'a qu'une racine carrée qui est 8.

c. Déterminer l'autre solution de l'équation (E).

2 Utiliser cette méthode pour résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a. $x^2 + 12x = 45$

b. $x^2 + 4x - 32 = 0$

1. a. $A_{\text{bleu}} = A_{\text{carré}} + 2 \times A_{\text{rectangle}} = x^2 + 10x$ mais aussi $A_{\text{bleu}} = (x + 5)^2 - 25$.

Donc $x^2 + 10x = (x + 5)^2 - 25$.

b. $x^2 + 10x = 39$

$$(x + 5)^2 - 25 = 39$$

$$(x + 5)^2 = 64$$

La solution positive de cette équation est 3.

c. L'autre solution est -13.

2. a. $x^2 + 12 = 45$

$$(x + 6)^2 - 36 = 45 \quad (x + 6)^2 = 81$$

$$x = 3 \text{ ou } x = -15.$$

b. $x^2 + 4 - 32 = 0$

$$(x + 2)^2 - 4 - 32 = 0$$

$$(x + 2)^2 = 36$$

$$x = 4 \text{ ou } x = -8$$

Exercices 20p51,48,49,50p52

20  **ORAL** **QCM** Choisir la ou les bonnes réponses.

Parmi les polynômes du second degré ci-dessous, dire ceux qui sont écrits sous forme canonique :

a. $x^2 + 7x + 1$ b. $(2x + 1)^2 - 4$ c. $3(x - 8)^2 + 5$

d. $-5(x + 1)^2 + 2$ e. $-3x^2 + x$ f. $3 + (3x - 5)^2$

48 Écrire chacun des polynômes du second degré suivants sous forme canonique.

a. $A(x) = x^2 + 6x - 10$

b. $B(x) = 3x^2 + 12x + 2$

c. $C(x) = -2x^2 + 8x - 12$

d. $D(x) = -x^2 + 6x - 1$

Capacité 3, p. 43

Pour les exercices **49** et **50**, écrire sous forme canonique chacun des polynômes du second degré donnés.

49 a. $f(x) = 6x^2 + 12x - 5$ b. $g(x) = -2x^2 + 8x + 5$

50 a. $h(x) = 3x^2 - x + 6$ b. $j(x) = -5x^2 + 10x - 3$

20 Les polynômes c et d.

48

a. $A(x) = (x + 3)^2 - 19$

b. $B(x) = 3(x + 2)^2 - 10$

c. $C(x) = -2(x - 2)^2 - 4$

d. $D(x) = -(x - 3)^2 + 8$

49

a. $f(x) = 6(x + 1)^2 - 11$

b. $g(x) = -2(x - 2)^2 + 13$

50

a.
$$h(x) = 3\left(x^2 - \frac{1}{3}x\right) + 6 = 3\left[x^2 - \frac{1}{3}x + \left(\frac{1}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2\right] + 6$$

$$= 3\left[\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{36}\right] + 6$$

$$h(x) = 3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{12} + 6 = 3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{12} + \frac{72}{12}$$

$$= 3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{71}{12}.$$

b. $j(x) = -5(x^2 - 2x) - 3 = -5(x^2 - 2x + 1^2 - 1) - 3 = -5((x - 1)^2 - 1) - 3.$

$j(x) = -5(x - 1)^2 + 5 - 3$, soit : $j(x) = -5(x - 1)^2 + 2.$