**Résolution de problèmes du second degré : optimisation**

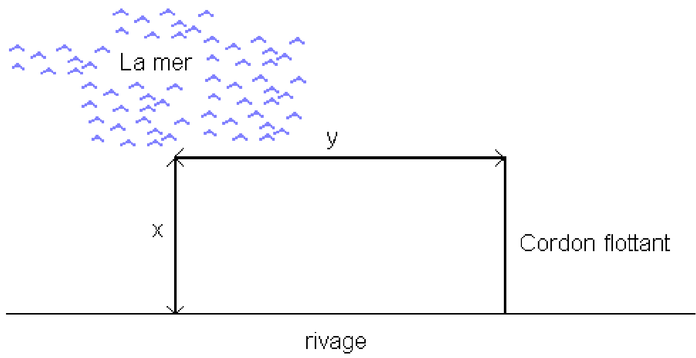
**Constituer un binôme et chercher les exercices ci-dessous.**

**Exercice 1 :**

Un maître nageur dispose d'un cordon flottant de 360 m de longueur pour délimiter un rectangle de baignade surveillée. On note $x$ et $y$ les dimensions, en mètres, de ce rectangle.

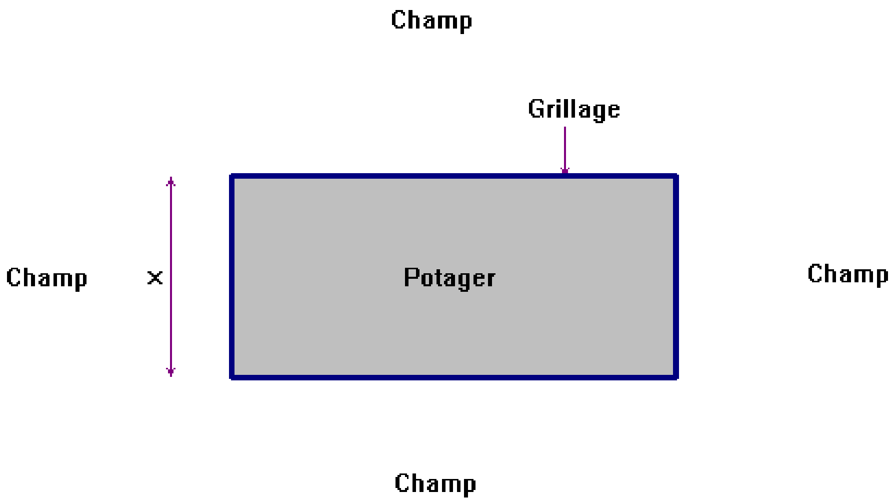
On veut délimiter un rectangle de baignade d'aire maximale.

1. Dans quel intervalle varie $x$ ?
2. Exprimer y en fonction de $x$ puis l'aire du rectangle en fonction de $x$. On notera $f(x)$ son aire en m² .
3. Etudier les variations de $f$.
5. Répondre à la problématique de l'exercice.




**Exercice 2 :**

On veut clôturer une partie d'un champ pour faire un potager rectangulaire.
On dispose pour cela de 100 m de grillage qui seront entièrement utilisés et on souhaite obtenir un potager d'une surface la plus grande possible.




$x$ désigne la largeur du potager en mètres.

**a)** Sachant que le périmètre du potager mesure 100 m, exprimer la longueur du potager en fonction de $x$.

**b)** En déduire que l'aire du potager est égale à $-x^2 + 50x$.

On note $f$ la fonction définie sur[0 ; 50] par $f(x) = -x^2 + 50x$.

**c)** Dresser le tableau de variation de la fonction $f$.

**d)** La fonction $f$ admet elle un maximum sur [0 ; 50] ?
Si oui , pour quelle valeur de $x$ est-il atteint ?

**e)** En déduire les dimensions (largeur et longueur) que doit avoir le potager pour que son aire soit maximale.

**Exercice 3 :**

**Le but de l'exercice est de rechercher parmi tous les rectangles de périmètre 8 celui ayant la plus grande aire.**

1. Soit $x$ est une dimension d'un rectangle de périmètre 8. Dans quel intervalle I varie $x$ ?
2. Démontrer que si $x$ est une dimension d'un rectangle de périmètre 8, alors son aire est égale à

$$-x^2 + 4x$$

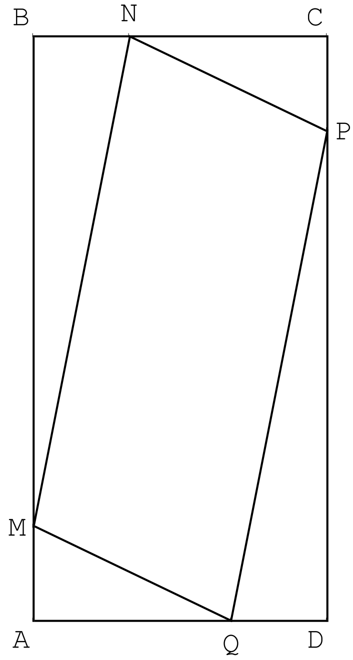
2. Soit $f$ la fonction définie sur I par : $f(x) = -x^2 + 4x$

a) Déterminer les variations de $f$.

b) Répondre à la problématique de l'exercice.

**Exercice 4:**

Dans un parterre rectangulaire ABCD, un jardinier doit semer du gazon sur un quadrilatère MNPQ de telle sorte que M soit sur [AB], N sur [BC], P sur [CD] et Q sur [AD] avec de plus AM= BN = CP = DQ = $x$. [AB] mesure 8 m et [AD] 4 m.




1) A quel intervalle I peuvent appartenir les nombres x ?

2) a) Montrer que l'aire du triangle rectangle AMQ est $x(4-x)$ et l'aire du triangle rectangle BMN est $x(8-x)$.
b) Exprimer l'aire $h(x)$ du quadrilatère MNPQ en fonction de $x$.
c) Montrer que $h(x) = 2x^2 - 12x + 32$.

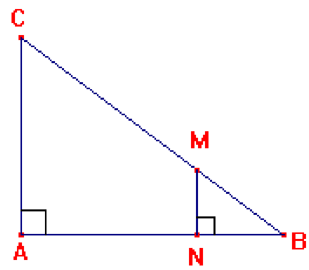
3) Faire l'étude des variations de $h$ sur l'intervalle I, puis construire la courbe représentant la fonction $h$.

6) Le jardinier, voulant faire des économies, voudrait que la surface à semer ait la plus petite aire possible..... Cela revient bien entendu à trouver le minimum de la fonction h sur I.
En déduire une solution au problème du jardinier et déterminer dans ce cas l'aire de la surface qu'il doit semer.

**Exercice 5 :**

Le triangle ABC ci-contre est rectangle en A.
AB = 4 et AC = 3. M est un point variable de [BC] et N est son projeté orthogonal sur (AB).

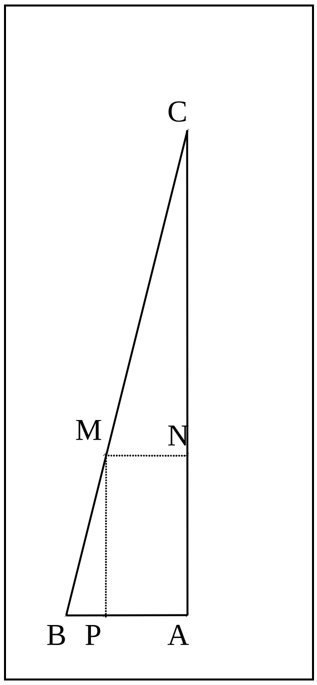
On pose BM = $x$.




1) Calculer BC.
2) Montrer que MN = $\frac{3}{5}x$ et que BN = $\frac{4}{5}x$.
3) En déduire que AM² = $x^2 - 6{,}4x + 16$.
4) On considère la fonction $f$ définie par : $f(x) = AM^2 = x^2 - 6{,}4x + 16$.
   a) Quel est l'ensemble de définition de la fonction $f$ ?
   b) Déterminer **en justifiant** les variations de $f$ .
   c) Déterminer **en justifiant** la valeur de $x$ pour laquelle AM² est minimal. Quelle est la valeur de AM correspondante ?
5) Montrer que dans ce cas le triangle AMB est rectangle en M et comparer AM² et MB × MC.

**Exercice 6:**

On souhaite construire une maison de forme rectangulaire dans l'angle droit d'un terrain triangulaire.
On considère que l'unité est le décamètre, et que AB = 2 ; AC = 8 ; MN = $y$ ; MP = $x$ .




1. Quelles sont les valeurs possibles pour $x$ ?
2. Exprimer $y$ en fonction de $x$.
3. Démontrer que l'aire f($x$) de la maison, exprimée en dam², peut s'écrire en fonction de $x$ : $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x$.
4. Conjecturer à l'aide de la représentation graphique de f , pour quelle valeur de $x$ l'aire de la construction est maximale ? Quel est ce maximum ? Définir la position de N dans ce cas.
5. Démonstration de la conjecture.
a) Etudier les variations de $f$ .
b) Démontrer la conjecture de la question 4.