

Exercice 1

Soit la fonction du second degré définie par $f(x) = x^2 - 3x$

1. Identifier les coefficients a , b et c .

2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ **point cours : racine d'un polynome**

Exercice 2

Mêmes questions avec $f(x) = 4x^2 - 1$.

Exercice 3

Soit la fonction du second degré définie par $f(x) = 3x^2 - 9x + 6$.

1. Identifier a , b et c .

2. Calculer $f(1)$ et $f(2)$. Que peut on en déduire ?

3. Démontrer que $f(x) = 3(x-1)(x-2)$. Que peut on en déduire ?

Point cours : factorisation d'un polynome du second degré à l'aide de 2 racines

Correction :

Exercice 1 : Soit la fonction du second degré définie par $f(x) = x^2 - 3x$

1. $a = 1$, $b = -3$ et $c = 0$.

2. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0$

$$\Leftrightarrow x \times x - x \times 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 3 \quad S = \{0; 3\}$$

point cours : racine d'un polynome

Soit f une **fonction polynôme de degré 2**. Les racines de ce polynôme, si elles existent, sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 2: $f(x) = 4x^2 - 1$.

1. $a = 4$, $b = 0$ et $c = -1$.

2. $f(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 4x^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{1}{4}} \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = -\frac{1}{2} \quad S = \left\{\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right\}$$

Exercice 3 : Soit la fonction du second degré définie par $f(x) = 3x^2 - 9x + 6$.

1. $a = 3$, $b = -9$ et $c = 6$.

2. $f(1) = 3 \times 1^2 - 9 \times 1 + 6 = 0$

$f(2) = 3 \times 2^2 - 9 \times 2 + 6 = 0$ **1 et 2** sont des racines de f ...

3. Pour tout réel x , $3(x-1)(x-2) = 3(x^2 - 2x - 1x + 2)$
 $= 3(x^2 - 3x + 2)$
 $= 3x^2 - 9x + 6$
 $= f(x)$

$$f(x) = 3(x-1)(x-2)$$

Point cours : factorisation d'un polynome du second degré à l'aide de 2 racines

Soit f une **fonction polynôme de degré 2** dont l'expression est $f(x) = ax^2 + bx + c$ ayant deux racines distinctes x_1 et x_2 . Alors, f peut s'écrire sous la **forme factorisée** :

$$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$$

Exercice : somme et produit de racines

Soit f un polynôme du second degré dont l'expression factorisée est $f(x) = 3(x - 2)(x - 5)$

1. Déterminer S la somme des racines de f puis P le produit des racines.

2. Déterminer les valeurs de a , b et c .

3. Dans le cas général, exprimer S et P en fonction de a , b et c .

1. Les racines de f sont 2 et 5. $S = 2 + 5 = 7$ et $P = 2 \times 5 = 10$.

2. $f(x) = 3(x - 2)(x - 5) = 3(x^2 - 5x - 2x - 10) = 3x^2 - 21x - 30$

$a = 3$, $b = -21$ et $c = -30$

3. $S = -b/a$ et $P = c/a$

Exercice : signe d'un polynôme du second degré ayant deux racines

1. Soit f un polynôme du second degré dont l'expression factorisée est $f(x) = 3(x - 2)(x + 5)$

Déterminer le signe de $f(x)$.

2. Soit f un polynôme du second degré dont l'expression factorisée est $f(x) = -4(x + 1)(x - 2)$

Déterminer le signe de $f(x)$.

1.

$$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5$$

x	$-\infty$	-5	2	$+\infty$	
$x - 2$	-	-	0	+	
$x + 5$	-	0	+	+	
$(x - 2)(x + 5)$	+	0	-	0	+
$3(x - 2)(x + 5)$	+	0	-	0	+

2. $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

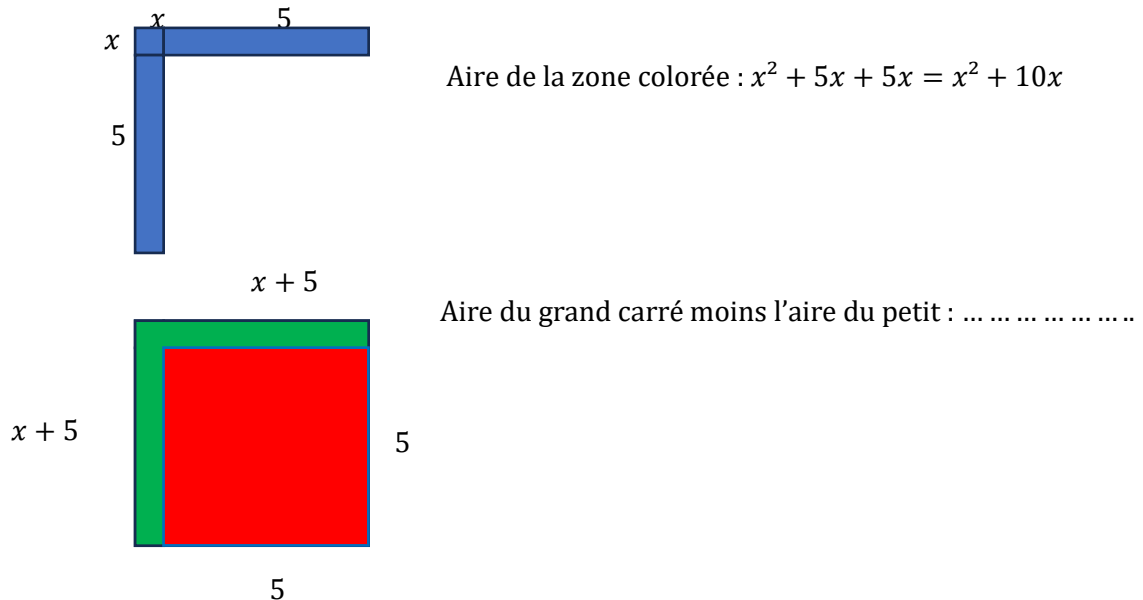
x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$x + 1$	-	0	+	+	
$x - 2$	-	-	0	+	
$(x + 1)(x - 2)$	+	0	-	0	+
$-4(x - 2)(x + 5)$	-	0	+	0	-

Cours : si f est un polynôme du second degré ayant deux racines alors f est du signe de a à l'extérieur des racines

La méthode d'Al Khwarizmi

Modèle : la fonction polynôme du second degré $x^2 + 10x$ peut aussi s'écrire sous la forme factorisée Nous allons partir à la recherche d'une nouvelle forme.

On construit un carré de côté x bordé par deux rectangles de côtés 5 (et x). On calcule l'aire de deux façons différentes.



On obtient donc $x^2 + 10x = \dots\dots\dots$

La forme obtenue s'appelle

La du polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$ est

Application 1: écrire les expressions suivantes en s'inspirant du modèle :

$$x^2 + 4x = \dots\dots\dots$$

$$x^2 + 25x = \dots\dots\dots$$

Application 2: cas général

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left(\dots\dots\dots \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left(\dots\dots\dots - \frac{\dots\dots\dots}{4a^2} \right) \quad \text{on pose } \Delta = b^2 - 4ac \\ &= a \left(\dots\dots\dots - \frac{\dots\dots}{4a^2} \right) \\ &= a(\dots\dots\dots)^2 - \frac{\dots\dots}{4a} \end{aligned}$$

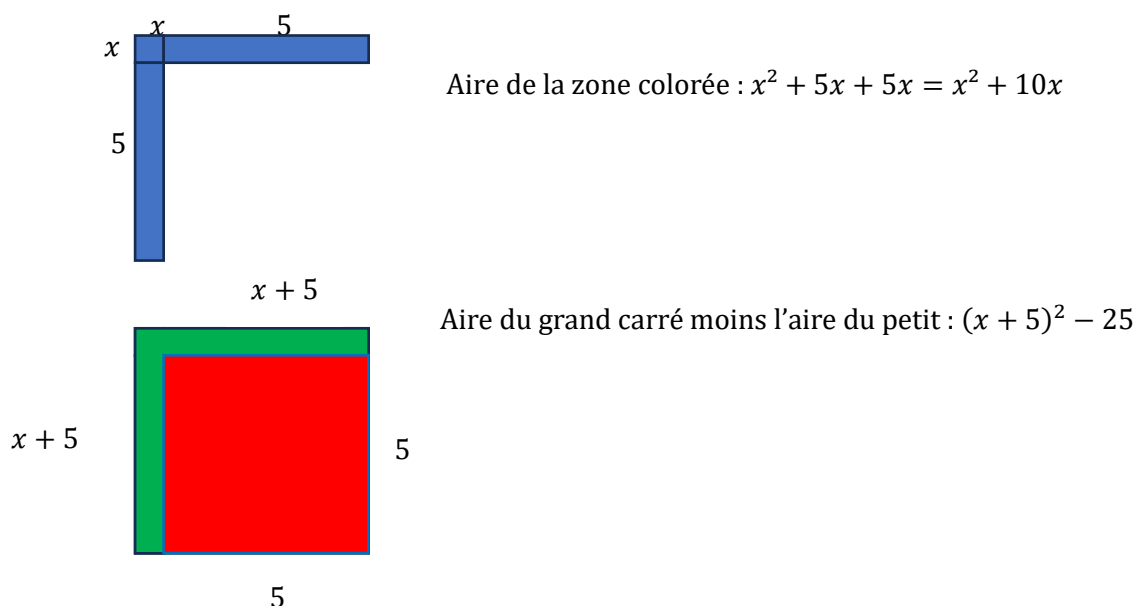
$$\alpha = \dots\dots\dots \quad \beta = \dots\dots\dots$$

Exercice : soit la fonction polynôme du second degré défini par $f(x) = 2x^2 - 20x + 10$. Déterminer sa forme canonique à l'aide des formules (on commencera par identifier a, b, c puis calculer Δ)

La méthode d'Al Khwarizmi

Modèle : la fonction polynôme du second degré $x^2 + 10x$ peut aussi s'écrire sous la forme factorisée $x(x + 10)$. Nous allons partir à la recherche d'une nouvelle forme.

On construit un carré de côté x bordé par deux rectangles de côtés 5 (et x). On calcule l'aire de deux façons différentes.



On obtient donc $x^2 + 10x = (x + 5)^2 - 25$

La forme obtenue s'appelle la forme canonique du polynôme du second degré $x^2 + 10x$

La forme canonique du polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$ est $a(x - \alpha)^2 + \beta$

Application 1: écrire les expressions suivantes en s'inspirant du modèle :

$$x^2 + 4x = (x + 2)^2 - 4$$

$$x^2 + 25x = (x + 5)^2 - 25$$

Application 2:cas général

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) \quad \text{on pose } \Delta = b^2 - 4ac \\ &= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right) \\ &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \\ \alpha &= -\frac{b}{2a} \quad \beta = -\frac{\Delta}{4a} \end{aligned}$$

Exercice : soit la fonction polynôme du second degré défini par $f(x) = 2x^2 - 20x + 10$. Déterminer sa forme canonique à l'aide des formules (on commencera par identifier a, b, c puis calculer Δ)

On identifie les coefficients a, b et c .

$$a = 2, b = -20 \text{ et } c = 10.$$

$$\text{On calcule le discriminant } \Delta = b^2 - 4ac = (-20)^2 - 4 \times 2 \times 10 = 320$$

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-20}{4} = 5$$

$$\text{et } \beta = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{320}{8} = -40$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

$$2x^2 - 20x + 10 = 2(x - 5)^2 - 40$$