

Chapitre 11: différentes écritures d'une même expression-applications

I- Différentes écritures d'une même expression :

1.Méthode générale pour montrer l'égalité de deux expressions :

Méthode : pour démontrer que deux expressions sont égales, on peut

- soit partir de la première expression et montrer à l'aide d'égalités successives qu'elle est égale à la deuxième.
- soit partir de la deuxième expression et montrer à l'aide d'égalités successives qu'elle est égale à la première.
- soit on peut montrer que les deux expressions sont égales à une troisième expression.
- soit montrer que la différence est égale à 0.

Remarque : Il ne faut **jamais partir de l'égalité** que l'on veut démontrer !

Exemple 1: démontrer que ,pour tout réel x , $(x + 1)(2x - 1) - 3 = 2x^2 + x - 4$

$$\begin{aligned}
 (x + 1)(2x - 1) - 3 &= x \times 2x + x \times (-1) + 1 \times 2x + 1 \times (-1) - 3 \\
 &= 2x^2 - x + 2x - 1 - 3 \\
 &= 2x^2 + x - 4
 \end{aligned}$$

Exemple 2: démontrer que ,pour tout réel x , $(3x - 4)(x + 2) - x^2 = (2x + 8)(x - 3) + 16$

$$\begin{aligned}
 (3x - 4)(x + 2) - x^2 &= 3x \times x + 3x \times 2 - 4 \times x - 4 \times 2 - x^2 \\
 &= 3x^2 + 6x - 4x - 8 - x^2 \\
 &= 2x^2 + 2x - 8
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2x + 8)(x - 3) + 16 &= 2x \times x + 2x \times (-3) + 8 \times x + 8 \times (-3) + 16 \\
 &= 2x^2 - 6x + 8x - 24 + 16 \\
 &= 2x^2 + 2x - 8
 \end{aligned}$$

On en déduit que $(3x - 4)(x + 2) - x^2 = (2x + 8)(x - 3) + 16$

Exemple 3: démontrer que $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = 3 - 2\sqrt{2}$

$ \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} &= \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} $	$ \begin{aligned} \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} &= \frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} \\ &= \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2})^2 - 1^2} \\ &= \frac{(\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2} + 1^2}{(\sqrt{2})^2 - 1^2} \\ &= \frac{2 - 2\sqrt{2} + 1}{2 - 1} \\ &= 3 - 2\sqrt{2} \end{aligned} $
---	--

2. Réduire des fractions sous le même dénominateur :

Définition :

Réduire au même dénominateur c'est transformer une somme (ou une différence) de deux fractions en une seule fraction.

Vidéo : mathssa.fr/denocom (5mns24s)

Exemple 1 : Réduire les expressions suivantes au même dénominateur $\frac{1}{4} - \frac{2}{3}$ puis $1 - \frac{1}{6} + \frac{5}{3}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} - \frac{2}{3} &= \frac{1 \times 3}{4 \times 3} - \frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{3}{12} - \frac{8}{12} = \frac{3-8}{12} = -\frac{5}{12} \\ 1 - \frac{1}{6} + \frac{5}{3} &= \frac{1}{1} - \frac{1}{6} + \frac{5}{3} = \frac{6}{6} - \frac{1}{6} + \frac{10}{6} = \frac{6-1+10}{6} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}\end{aligned}$$

Exemple 2 : Réduire les expressions suivantes au même dénominateur $A = 3 + \frac{5x}{2x+1}$ et $B = \frac{7x}{x-2} - \frac{5}{3-x}$

$$\begin{aligned}A &= 3 + \frac{5x}{2x+1} \\ &= \frac{3}{1} + \frac{5x}{2x+1} \\ &= \frac{3(2x+1)}{2x+1} + \frac{5x}{2x+1} \\ &= \frac{3(2x+1) + 5x}{2x+1} \\ &= \frac{6x+3+5x}{2x+1} \\ &= \frac{11x+3}{2x+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B &= \frac{7x}{x-2} - \frac{5}{3-x} \\ &= \frac{7x(3-x)}{(x-2)(3-x)} - \frac{5(x-2)}{(3-x)(x-2)} \\ &= \frac{7x(3-x) - 5(x-2)}{(x-2)(3-x)} \\ &= \frac{21x - 7x^2 - 5x + 10}{(x-2)(3-x)} \\ &= \frac{-7x^2 + 16x + 10}{(x-2)(3-x)}\end{aligned}$$

Exemple 3 : Montrer que pour tout réel $x \neq -3$, $\frac{4x+11}{x+3} = 4 - \frac{1}{x+3}$ vidéo : mathssa.fr/denomin (4minutes)

$$\begin{aligned}4 - \frac{1}{x+3} &= \frac{4}{1} - \frac{1}{x+3} \\ &= \frac{4(x+3)}{x+3} - \frac{1}{x+3} \\ &= \frac{4x+12-1}{x+3} \\ &= \frac{4x+11}{x+3}\end{aligned}$$

3. Développer-factoriser à l'aide de la distributivité ou des identités remarquables :**Propriétés :**

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$


 développement


 factorisation
Méthode : pour factoriser , soit on repère un facteur commun soit on utilise une identité remarquable.**Exemple 1 : développements** Vidéo : mathssa.fr/dev3.html (9mns41s)Développer et réduire en utilisant les identités remarquables : $A = (2x - 3)^2 + (x + 5)(3 - x)$ et $B = (x - 3)(x + 3) - (4 - 3x)^2$

$$\begin{aligned}
 A &= (2x - 3)^2 + (x + 5)(3 - x) \\
 &= (2x)^2 - 2 \times 2x \times 3 + 3^2 + x \times 3 - x \times x + 5 \times 3 - 5 \times x \\
 &= 4x^2 - 12x + 9 + 3x - x^2 + 15 - 5x \\
 &= 3x^2 - 14x + 24
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B &= (x - 3)(x + 3) - (4 - 3x)^2 \\
 &= x^2 - 3^2 - (4^2 - 2 \times 4 \times 3x + (3x)^2) \\
 &= x^2 - 9 - (16 - 24x + 9x^2) \\
 &= x^2 - 9 - 16 + 24x - 9x^2 \\
 &= -8x^2 + 24x - 25
 \end{aligned}$$

Exemple 2 : factorisations à l'aide d'un facteur communFactoriser $A = 2x^2 + 5x$, $B = (2 - 5x)^2 - (2 - 5x)(1 + x)$

$$\begin{aligned}
 A &= 2x^2 + 5x = x \times 2x + x \times 5 \\
 &= x(2x + 5)
 \end{aligned}$$

Pour s'entraîner : <http://bref.jeduoque.net/eb2vpt>Vidéo : mathssa.fr/facto2

$$\begin{aligned}
 B &= (2 - 5x)^2 - (2 - 5x)(1 + x) = (2 - 5x) \times (2 - 5x) - (2 - 5x) \times (1 + x) \\
 &= (2 - 5x)((2 - 5x) - (1 + x)) \\
 &= (2 - 5x)(2 - 5x - 1 - x) \\
 &= (2 - 5x)(1 - 6x)
 \end{aligned}$$

Exemple 3 : factorisations à l'aide d'une identité remarquableVidéo : mathssa.fr/facto (13mns -16mns) et mathssa.fr/facto3 (13 mns)

Factoriser à l'aide d'identités remarquables :

$$A = x^2 - 2x + 1, B = 9x^2 - 4, C = 4x^2 + 4x + 1, D = (x - 1)^2 - (2x + 3)^2$$

$$\text{et } E = 3(x - 2)(x + 7) - 2(x^2 - 4)$$

$$A = x^2 - 2x + 1 = \overset{a^2}{\uparrow} x^2 - 2 \times \overset{b^2}{\uparrow} x \times 1 + 1^2 \quad a = x, \quad b = 1$$

$$= (x - 1)^2$$

$$B = 9x^2 - 4 = \overset{a^2}{\uparrow} (3x)^2 - \overset{b^2}{\uparrow} 2^2 \quad a = 3x, \quad b = 2$$

$$= (3x + 2)(3x - 2)$$

$$C = 4x^2 + 4x + 1 = \overset{a^2}{\uparrow} (2x)^2 + 2 \times \overset{b^2}{\uparrow} 2x \times 1 + 1^2 \quad a = 2x, \quad b = 1$$

$$= (2x + 1)^2$$

$$D = \overset{a^2}{\uparrow} (x - 1)^2 - \overset{b^2}{\uparrow} (2x + 3)^2 = ((x - 1) + (2x + 3))((x - 1) - (2x + 3)) \quad a = x - 1, \quad b = 2x + 3$$

$$= (x - 1 + 2x + 3)(x - 1 - 2x - 3)$$

$$= (3x + 2)(-x - 4)$$

$$E = 3(x - 2)(x + 7) - 2(\overset{a^2}{\uparrow} x^2 - \overset{b^2}{\uparrow} 4) = 3(x - 2)(x + 7) - 2(x^2 - 2^2) \quad a = x \text{ et } b = 2$$

$$= 3(x - 2)(x + 7) - 2(x - 2)(x + 2)$$

$$= (x - 2) \times 3(x + 7) - (x - 2) \times 2(x + 2)$$

$$= (x - 2)(\overset{\curvearrowright}{3(x + 7)} - \overset{\curvearrowright}{2(x + 2)})$$

$$= (x - 2)(3x + 21 - 2x - 4)$$

$$= (x - 2)(x + 17)$$

II- Application à la résolution d'équations complexes à une seule inconnue

1. Equations produit nul

Définition :

On appelle **équation produit nul**, une équation dont un **membre** est un **produit** de facteurs et dont l'**autre membre** est **nul** c'est-à-dire une équation type $A \times B = 0$.

Propriété : (équation produit nul)

Un **produit** de facteurs est nul si et seulement si au moins un de ces facteurs est nul

vidéo : mathssa.fr/equapro (3mns)

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(2x + 1)(3x - 2) = 0$.

$(2x + 1)(3x - 2) = 0$ équivaut à $2x + 1 = 0$ ou $3x - 2 = 0$

équivaut à $2x = -1$ ou $3x = 2$

équivaut à $\frac{2x}{2} = \frac{-1}{2}$ ou $\frac{3x}{3} = \frac{2}{3}$

équivaut à $x = -\frac{1}{2}$ ou $x = \frac{2}{3}$ L'ensemble des solutions est $S = \left\{ -\frac{1}{2}; \frac{2}{3} \right\}$

Conséquence de la propriété :

L'équation $x^2 = 0$ admet une seule solution : 0

2. Equation quotient nul :

Définition :

On appelle **équation quotient nul**, une équation dont un **membre** est un **quotient** de facteurs et dont l'**autre membre** est **nul** cad du type $\frac{A}{B} = 0$.

Propriété : (équation quotient nul)

- $\frac{A}{B} = 0$ équivaut à $A = 0$ et $B \neq 0$
- Un **quotient** de **facteurs** est **nul** si et seulement si le **numérateur** est **nul** et le **dénominateur** est **non nul**

Application : vidéo : mathssa.fr/equaquo (3mns)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\frac{3x-9}{x+1} = 0$

$\frac{3x-9}{x+1} = 0$ équivaut à $3x - 9 = 0$ et $x + 1 \neq 0$

équivaut à $3x = 9$ et $x \neq -1$ (valeur interdite)

équivaut à $x = \frac{9}{3} = 3$ et $x \neq -1$ (valeur interdite)

L'ensemble des solutions de l'équation est $S = \{3\}$.

3.Méthode générale :

Méthode :

En règle générale, pour résoudre une équation sans dénominateur, il faut :

- obtenir un membre de droite nul
- factoriser le membre de gauche afin de se ramener à une **équation produit nul**
- le cas échéant, on pourra développer

En règle générale, pour résoudre une équation avec dénominateur, il faut :

- obtenir un membre de droite nul
- mettre le membre de gauche sous le même dénominateur afin de se ramener à une **équation quotient nul**

Exercice 1 : vidéo : mathssa.fr/facto4 (5mns)

Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $(3x + 1)(1 - 6x) = (3x + 7)(3x + 1)$

$$(3x + 1)(1 - 6x) = (3x + 7)(3x + 1)$$

$$\Leftrightarrow (3x + 1)(1 - 6x) - (3x + 1)(3x + 7) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x + 1)((1 - 6x) - (3x + 7)) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x + 1)(1 - 6x - 3x - 7) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x + 1)(-9x - 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x + 1 = 0 \text{ ou } -9x - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x = -1 \text{ ou } -9x = 6$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} \text{ ou } x = \frac{6}{-9} = -\frac{2}{3} \quad S = \left\{-\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right\}$$

Exercice 2 : Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $\frac{2x-1}{x+2} = \frac{x+2}{2x-1}$

$$\frac{2x-1}{x+2} = \frac{x+2}{2x-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-1}{x+2} - \frac{x+2}{2x-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x-1)(2x-1)}{(x+2)(2x-1)} - \frac{(x+2)(x+2)}{(x+2)(2x-1)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x-1)^2 - (x+2)^2}{(x+2)(2x-1)} = 0 \quad a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$\Leftrightarrow \frac{((2x-1) + (x+2))((2x-1) - (x+2))}{(x+2)(2x-1)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(3x+1)(x-3)}{(x+2)(2x-1)} = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x + 1)(x - 3) = 0 \text{ et } (x + 2)(2x - 1) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 3x + 1 = 0 \text{ ou } x - 3 = 0 \text{ et } x + 2 \neq 0 \text{ et } 2x - 1 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} \text{ ou } x = 3 \text{ et } x \neq -2 \text{ et } x \neq \frac{1}{2} \quad S = \left\{-\frac{1}{3}; 3\right\}$$

4.Résolution de l'équation $x^2 = a$:

Propriété : Soit $a > 0$

L'équation $x^2 = a$ admet exactement deux solutions : $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$

Vidéo : mathssa.fr/facto5 (6mns32s)

Application : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 = 3$.

$x^2 = 3 \Leftrightarrow x = -\sqrt{3} \text{ ou } x = \sqrt{3}$. L'ensemble des solutions de l'équation $x^2 = 3$ est $S = \{\sqrt{3}; -\sqrt{3}\}$

Exercice : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(x - 3)^2 = 9$

$$(x - 3)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow x - 3 = \sqrt{9} \text{ ou } x - 3 = -\sqrt{9}$$

$$\Leftrightarrow x - 3 = 3 \text{ ou } x - 3 = -3$$

$$\Leftrightarrow x = 3 + 3 = 6 \text{ ou } x = -3 + 3 = 0 \quad S = \{0; 6\}$$

III- Choisir la forme la plus adaptée en fonction du contexte

Exercice type:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x - 2)(x - 6) - 5(x^2 - 4)$ **(expression 1)**

1. Développer $f(x)$. **(expression 2)**
2. Factoriser $f(x)$ (à partir de la forme initiale). **(expression 3)**
3. Montrer que $f(x) = -4(x + 1)^2 + 36$. **(expression 4)**
4. En utilisant l'expression la plus adaptée, calculer $f(0)$, $f(2)$, $f(-1)$, $f(\sqrt{2})$
5. En utilisant l'expression la plus adaptée, résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations :
 - a) $f(x) = 0$
 - b) $f(x) = 32$
 - c) $f(x) = 36$
 - d) $f(x) = -5(x^2 - 4)$

$$\begin{aligned}
 1. \quad f(x) &= (x - 2)(x - 6) - 5(x^2 - 4) \\
 &= x^2 - 6x - 2x + 12 - 5x^2 + 20 \\
 &= -4x^2 - 8x + 32
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad f(x) &= (x - 2)(x - 6) - 5(x^2 - 2^2) \\
 &= (x - 2)(x - 6) - 5(x - 2)(x + 2) \\
 &= (x - 2)((x - 6) - 5(x + 2)) \\
 &= (x - 2)(x - 6 - 5x - 10) \\
 &= (x - 2)(-4x - 16)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad -4(x + 1)^2 + 3 &= -4(x^2 + 2 \times x \times 1 + 1^2) + 3 \\
 &= -4(x^2 + 2x + 1) + 3 \\
 &= -4x^2 - 8x - 4 + 3 \\
 &= -4x^2 - 8x - 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll}
 4. \quad f(x) = (x - 2)(x - 6) - 5(x^2 - 4) & \textbf{(expression 1)} & f(x) = -4x^2 - 8x + 32 & \textbf{(expression 2)} \\
 f(x) = (x - 2)(-4x - 16) & \textbf{(expression 3)} & f(x) = -4(x + 1)^2 + 36. & \textbf{(expression 4)}
 \end{array}$$

$$f(0) = -4 \times 0^2 - 8 \times 0 + 32 = 32$$

$$f(2) = (2 - 2)(-4 \times 2 - 16) = 0$$

$$f(-1) = -4(-1 + 1)^2 + 36 = 36$$

$$f(\sqrt{2}) = -4 \times \sqrt{2}^2 - 8\sqrt{2} + 32 = -8 - 8\sqrt{2} + 32 = 24 - 8\sqrt{2}$$

$$5a) (x-2)(-4x-16) = 0 \Leftrightarrow x-2 = 0 \text{ ou } -4x-16 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } -4x = 16$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = \frac{16}{-4} = -4$$

$$S = \{2; -4\}$$

$$b) -4x^2 - 8x + 32 = 32 \Leftrightarrow -4x^2 - 8x = 0$$

$$\Leftrightarrow x \times (-4x) - x \times 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow x \times (-4x - 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } -4x - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } -4x = 8$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -2$$

$$S = \{-2; 0\}$$

$$c) -4(x+1)^2 + 36 = 36$$

$$\Leftrightarrow -4(x+1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x+1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \quad S = \{-1\}$$

$$d) (x-2)(x-6) - 5(x^2-4) = -5(x^2-4)$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-6) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-2 = 0 \text{ ou } x-6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = 6 \quad S = \{2; 6\}$$

IV- Application à la résolution d'inéquations complexes à une seule inconnue

Méthode :

En règle générale, pour résoudre une inéquation sans dénominateur, il faut :

- obtenir un membre de droite nul
- factoriser le membre de gauche et faire un tableau de signe
- le cas échéant, on pourra développer

En règle générale, pour résoudre une inéquation avec dénominateur, il faut :

- obtenir un membre de droite nul
- mettre le membre de gauche sous le même dénominateur et faire un tableau de signe

Exercice type:

Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $x^2 > 4x$

$$x^2 > 4x \Leftrightarrow x^2 - 4x > 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-4) > 0$$

On étudie le signe de $x(x-4)$ ce qui revient à étudier le signe de x et de $x-4$.

$$x=0$$

$$x-4=0 \Leftrightarrow x=4$$

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
x		-	0	+		+	
$x-4$		-		-	0	+	
$x \times (x-4)$		+	0	-	0	+	

$$x \times (x-4) > 0 \text{ si } x < 0 \text{ ou } x > 4 \quad S =]-\infty; 0[\cup]4; +\infty[$$