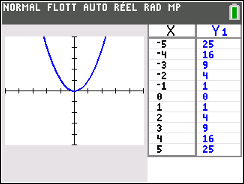
**Chapitre 14 : les fonctions de référence**

**I- Fonction paire et impaire :**

# [vidéo](https://www.youtube.com/watch?v=DUbAkwCX8O8) : [mathssa.fr/paritefct.html](http://www.mathssa.fr/paritefct.html) (jusqu’à 6mns et 25 secondes)

# Exemple 1 :

Soit la fonction définie sur ℝ par Obtenir à l’aide de sa calculatrice, l’écran ci-dessous :



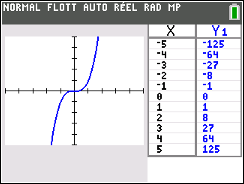
# 

1. Quelle conjecture peut-on émettre concernant  ? Il semble que
2. Compléter le calcul

1. Quelle particularité observe t’on quand regarde la courbe de  ?

La courbe de admet l’axe des ordonnées comme axe de symétrie.

# Exemple 2 :

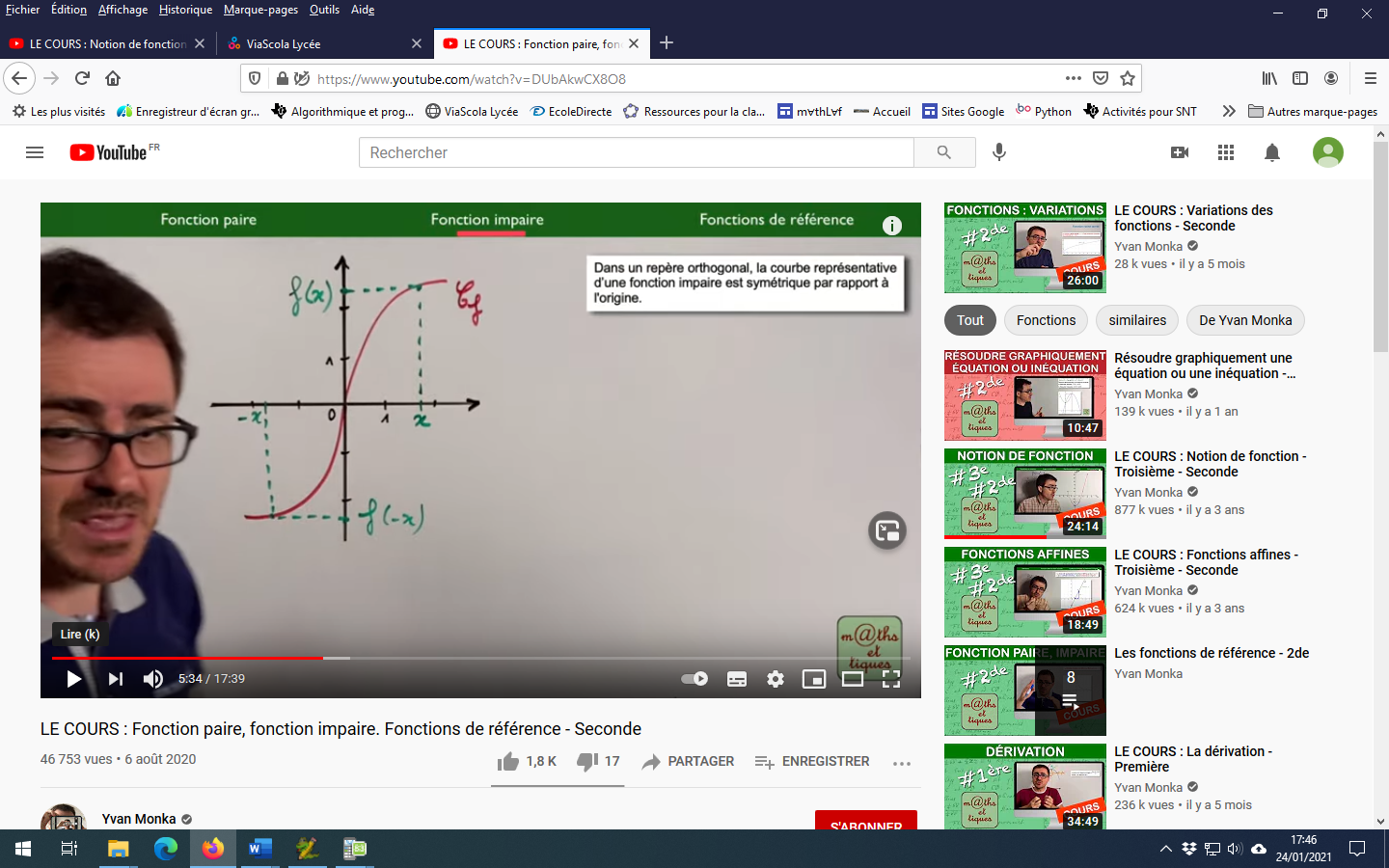
Soit la fonction définie sur ℝ par Obtenir à l’aide de sa calculatrice, l’écran ci-dessous :

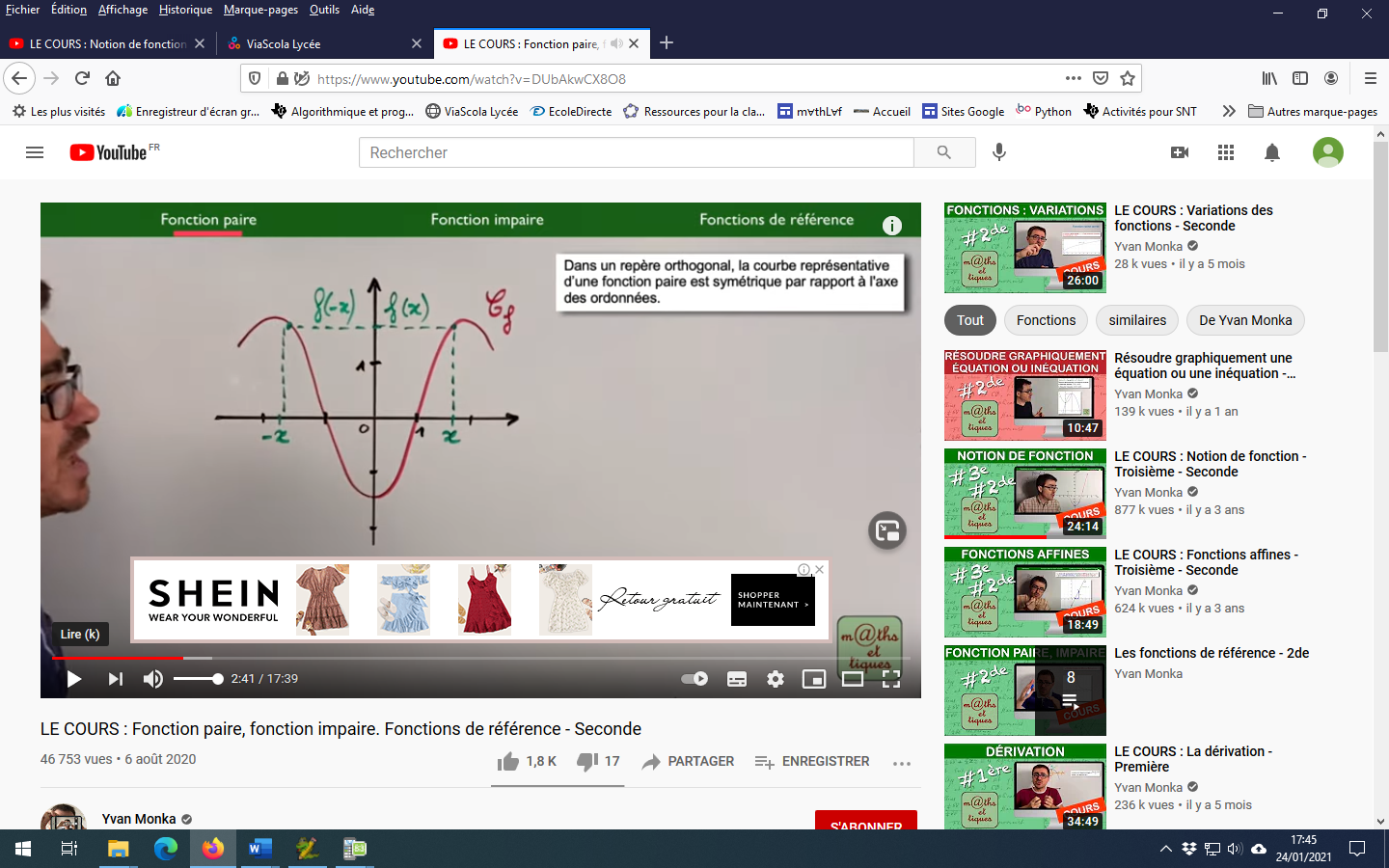
# 

1. Quelle conjecture peut-on émettre concernant  ? Il semble que
2. Compléter le calcul

Quelle particularité observe t’on quand regarde la courbe de  ?

La courbe de f admet l’origine O comme centre de symétrie.





est paire est impaire

|  |
| --- |
| **Définition:** est la fonction définie sur D dont le centre est 0.  Une fonction *f* est paire lorsque pour tout réel *x* de *D*, .  (tout nombre et son opposé ont la même image)  Une fonction *f* est impaire lorsque pour tout réel *x* de *D*, .  (tout nombre et son opposé ont des images opposés) |

Remarque :Dans un repère orthogonal , la courbe représentative d’une fonction paire admet l’axe des ordonnées comme axe de symétrie. Dans un repère orthogonal , la courbe représentative d’une fonction impaire admet le centre O du repère comme centre de symétrie.

**I- La fonction carré**

1. **Définition**

**Définition :**

La **fonction carré** *f* est définie sur ℝ par .

Exemples : calcul d’images

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 |
| *f* (*x*) | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 |

**2.Parité :**

**Propriété:**

**l**a **fonction carré** *f* est paire.

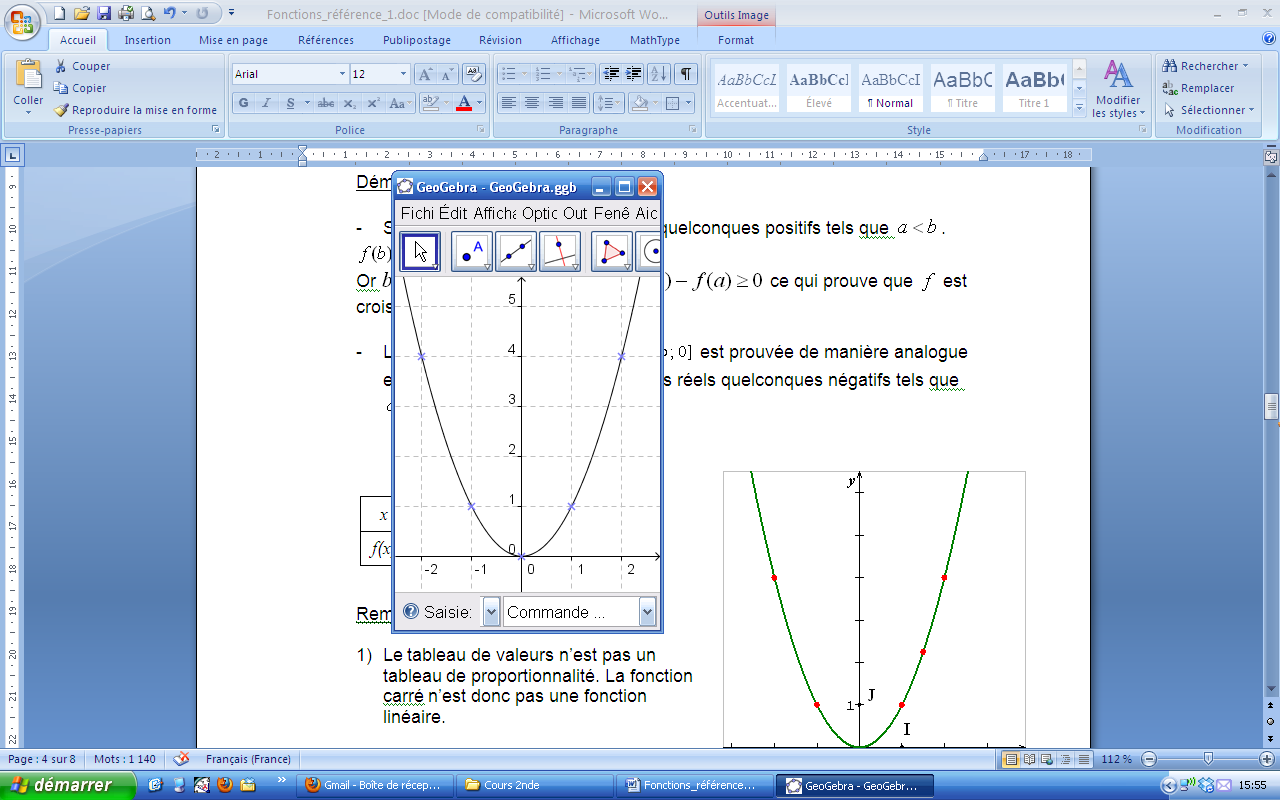
**Preuve :**

Pour tout réel ,

**Conséquence graphique :**

Dans un repère orthogonal, la courbe de la fonction carré admet l’axe des ordonnées comme axe de symétrie.

**3.Représentation graphique**



|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 |
| *f* (*x*) | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 |

**Remarques :**

* Le tableau de valeurs n’est pas un tableau de proportionnalité. La fonction carré n’est donc pas une fonction linéaire.
* Dans un repère (O, I, J), la courbe d’équation de la fonction carré est appelée une **parabole** de sommet O.

**4.Variations et conséquences**

**Propriété :**

La fonction carré *f* est décroissante sur l’intervalle et croissante sur l’intervalle .

**Tableau de variations**

|  |  |
| --- | --- |
|  | -∞ 0 +∞ |
|  | 0 |

**Conséquence :** la fonction carrée admet un minimum en de valeur

**Tableau de signe**

|  |  |
| --- | --- |
|  | -∞ 0 +∞ |
|  | + 0 + |

La fonction carrée est strictement positive sauf en 0 où elle s’annule.

**Démonstration au programme :**

Vidéo : [mathssa.fr/ine3](http://www.mathssa.fr/ine3)

On pose : .

* Soit *a* et *b* deux nombres réels quelconques positifs tels que .

Or , et donc ce qui prouve que *f* est croissante sur l’intervalle .

* La décroissance sur l’intervalle est prouvée de manière analogue en choisissant *a* et *b* deux nombres réels quelconques négatifs tels que .

Propriété : et sont deux nombres réels , on a alors :

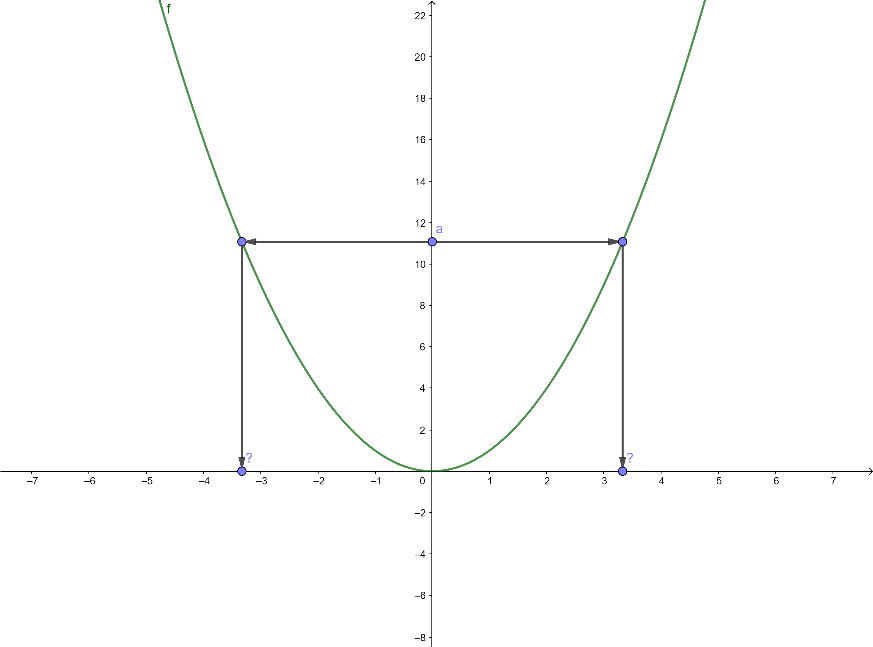
Si

Si

**4.Equation du type ()**

**Propriété :**

L’équation avec admet exactement 2 solutions et

****

Preuve :

équivaut à

Application :

Résoudre dans ℝ l’équation .

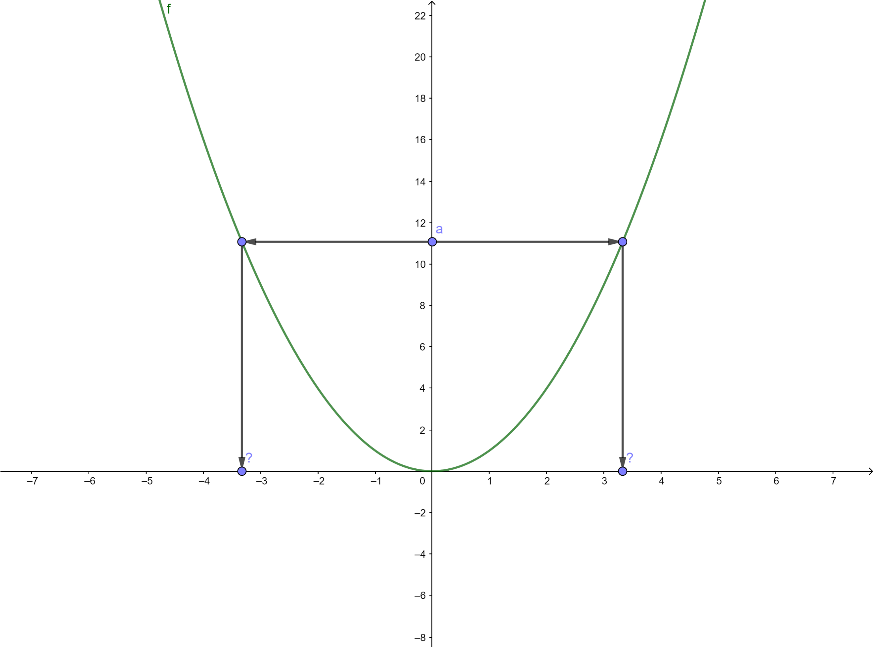
Les solutions sont et - S = { ;- }

**5.Inéquation du type ou ()**

**Propriété :**

L’inéquation avec admet pour solutions les réels de l’intervalle  ; [.

L’inéquation avec admet pour solutions les réels de l’intervalle ][

****

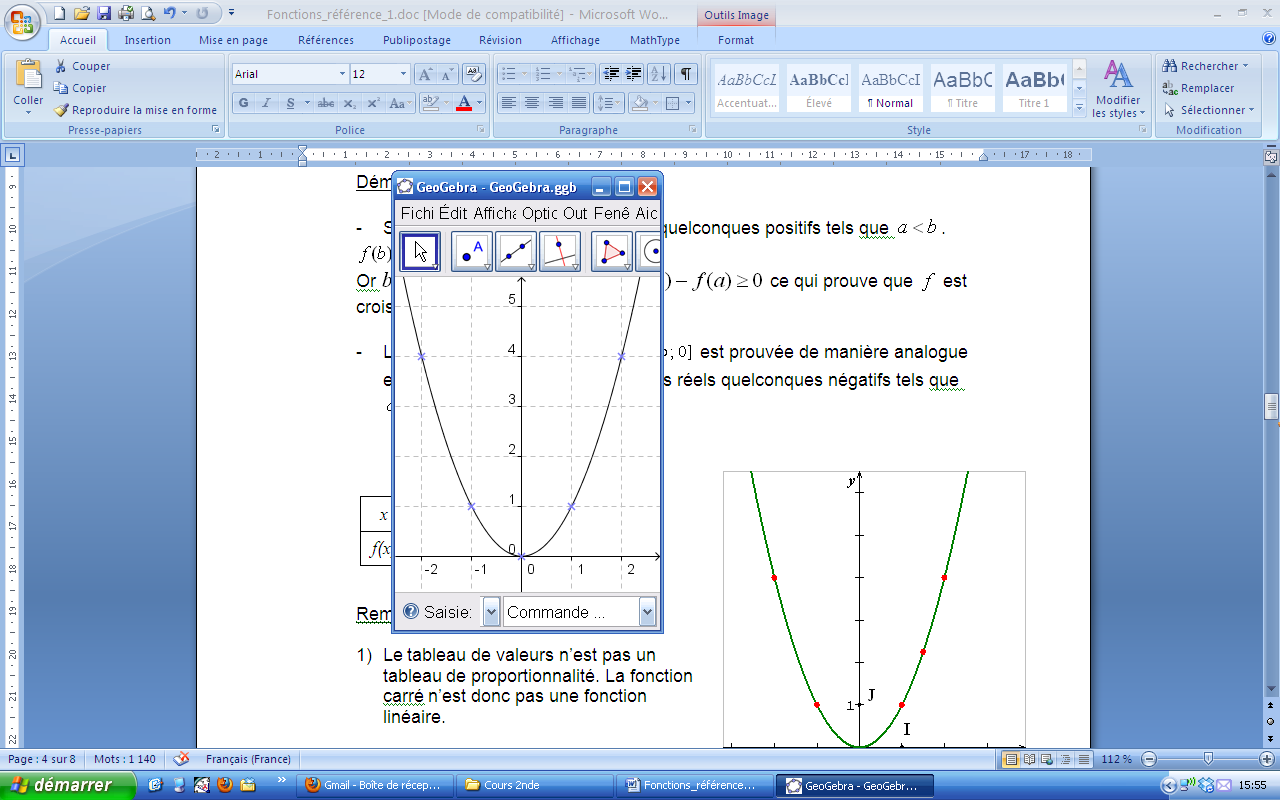
Preuve :

équivaut à

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  | * *- 0 +* |
|  | * *0 + +* |
|  | *+ 0 - 0 +* |

lorsque ∈

L’ensemble des solutions de l’inéquation est ∈

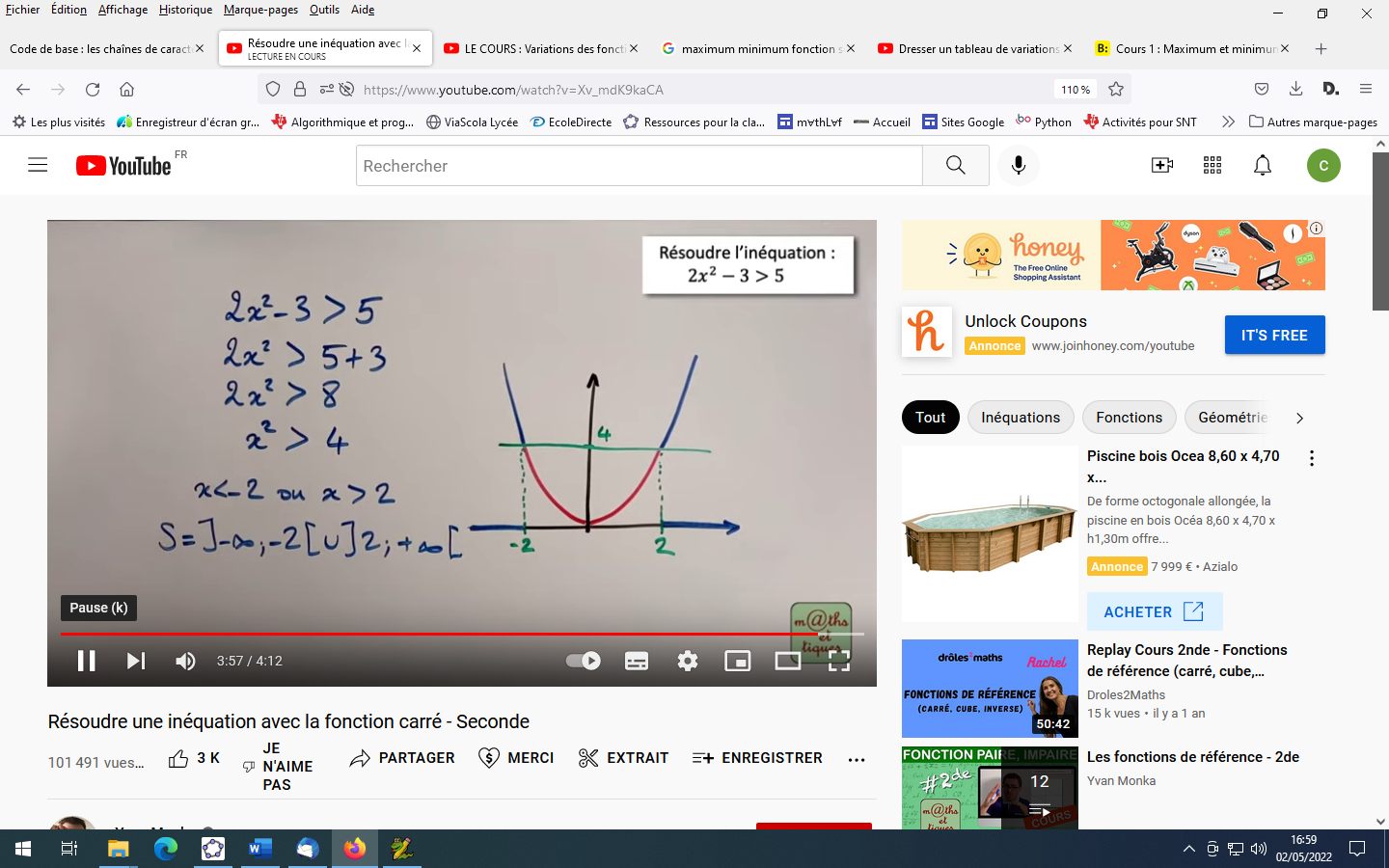
Application :

Résoudre dans ℝ l’inéquation .

S=]-∞ ;-

Résoudre une inéquation avec la fonction carré :

Vidéo : [mathssa.fr/ine4](http://www.mathssa.fr/ine4)  4mns12s



**Exercice :**

Une entreprise fabrique et vend chaque mois entre 50 et 100 vélos.

Le prix en € de vente **d’un vélo**, est où est le nombre de vélos fabriqués

Le montant, en € , des dépenses pour la fabrication de vélos est .

On suppose que l’entreprise vend l’ensemble des vélos fabriqués.

1.Démontrer que la recette de la société est

2.Déterminer, à partir de combien de vélos fabriqués l’entreprise réalise un bénéfice. (on admettra que les recettes et les dépenses varient entre 0 et 6000 – on réalise un bénéfice dès que )

1.

2. On résout l’inéquation R>d.

ou

ou (impossible)

Il faut donc produire au minimum 71 vélos.



On représente les courbes de R et de d à l’écran de la calculatrice (on prend [50 ;100] pour x et [0 ;6000] pour y)

On résout l’inéquation R>d.

On retrouve . Il faut donc produire au minimum 71 vélos

**II- La fonction inverse**

**1.Définition**

**Définition :**

La **fonction inverse** *f* est définie sur ℝ**\** par .

Remarques :

* ℝ \ désigne l’ensemble des nombres réels sauf 0, c'est-à-dire ] –∞ ; 0 [ U ] 0 ; +∞ [. On peut aussi noter cet ensemble ℝ\*.
* La fonction inverse n’est pas définie en 0.

Exemples : calcul d’images

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | –2 | –1 | 0,25 | 1 | 2 | 3 |
| *f*(*x*) |  |  | 4 | 1 | 0,5 |  |

**2.Parité :**

**Propriété:**

**l**a **fonction inverse** est impaire.

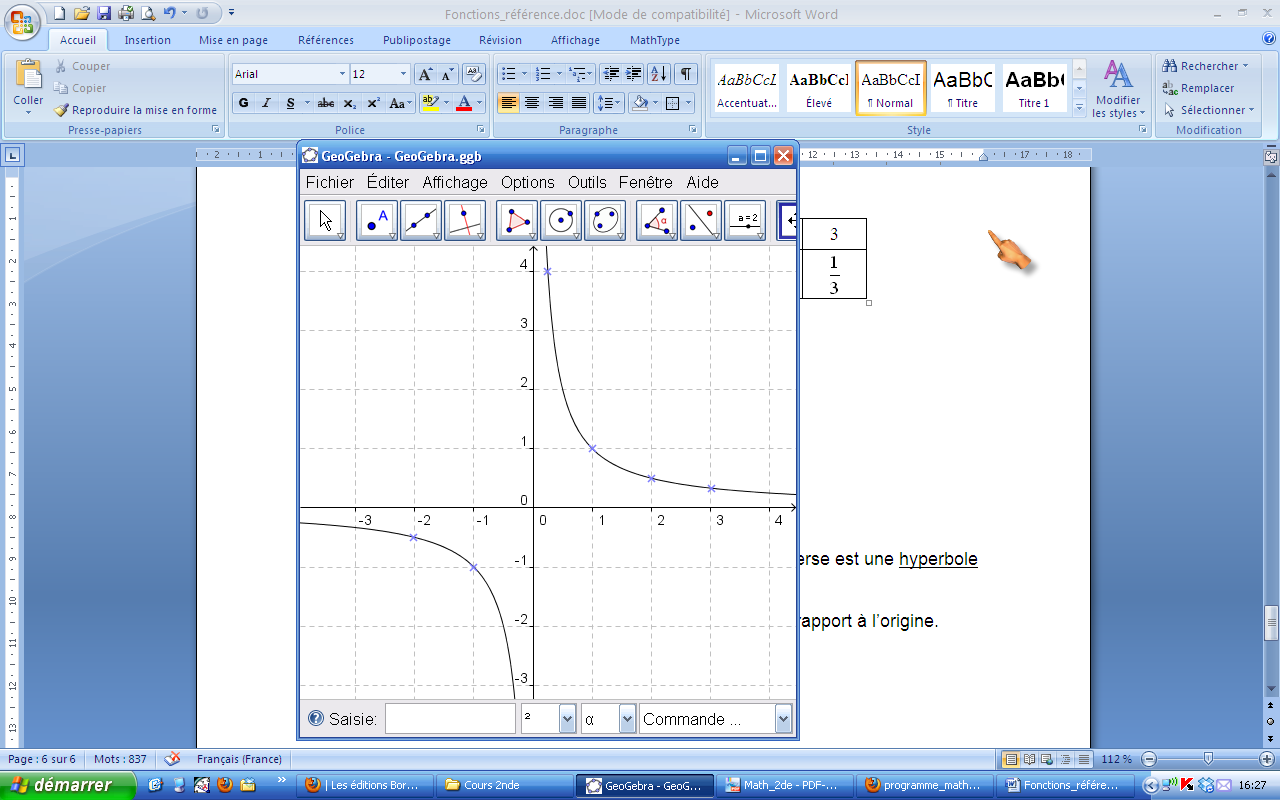
**Preuve :**Pour tout réel ,

**Conséquence graphique :**

Dans un repère orthogonal, la courbe de la fonction inverse admet l’origine O comme centre de symétrie.

**3.Représentation graphique**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | –2 | –1 | 0,25 | 1 | 2 | 3 |
| *f*(*x*) | –0,5 | –1 | 4 | 1 | 0,5 |  |

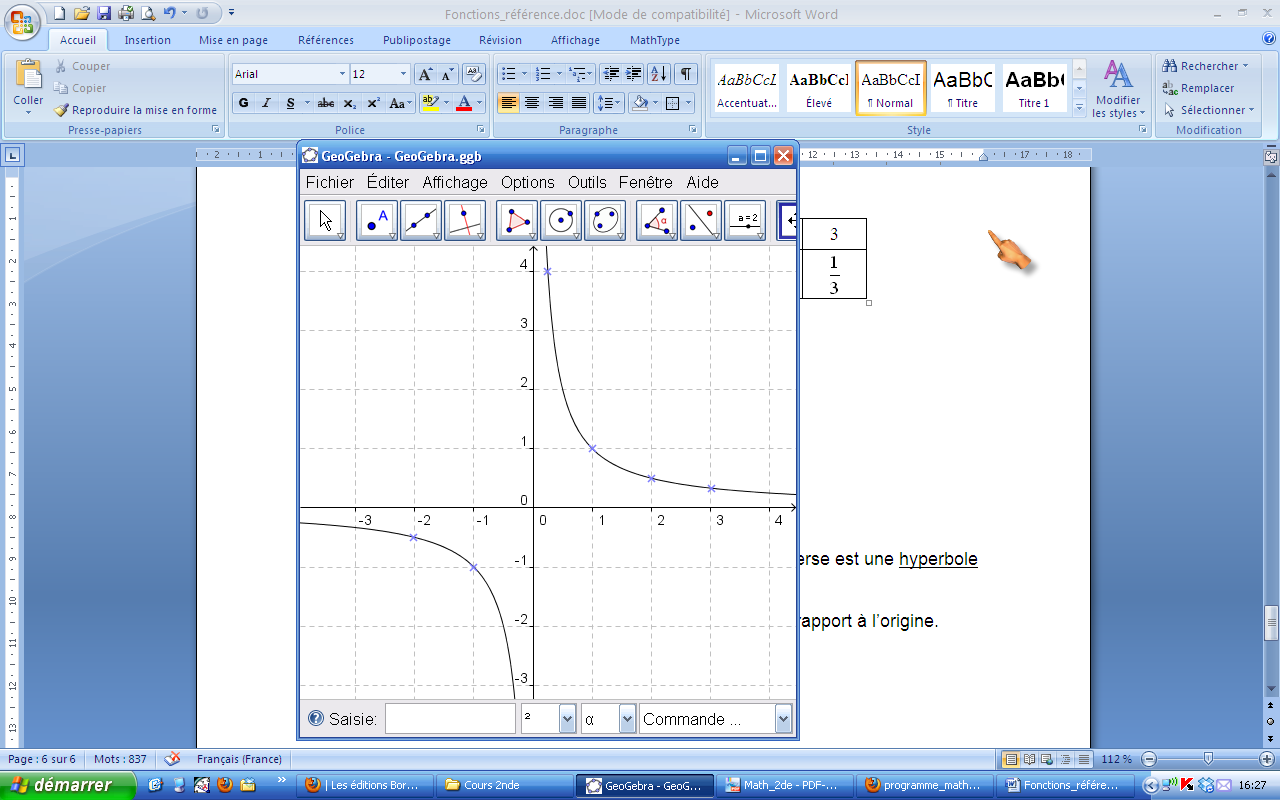


**Remarque :**Dans un repère (O, I, J), la courbe d’équation de la fonction inverse est une **hyperbole** de centre O.

**4.Variations et conséquences**

**Propriété :**

La fonction inverse est décroissante sur l’intervalle et décroissante sur l’intervalle .



Remarque :

La variation d’une fonction ne peut s’étudier que sur un intervalle.

On ne peut donc pas évoquer de décroissance sur

]–∞ ; 0[ U ]0 ; +∞[ qui n’est pas un intervalle mais conclure de manière séparée que la fonction inverse est décroissante sur l’intervalle et décroissante sur l’intervalle .

**Démonstration au programme :**

**Vidéo :** [**mathssa.fr/ine5**](http://www.mathssa.fr/ine5)  **7mns37s**

On pose : .

Soit *a* et *b* deux nombres réels strictement positifs avec *a* < *b.*

– =

Or *a* > 0, *b* > 0 et *a* – *b* < 0. Donc .

*f* est ainsi décroissante sur l’intervalle .

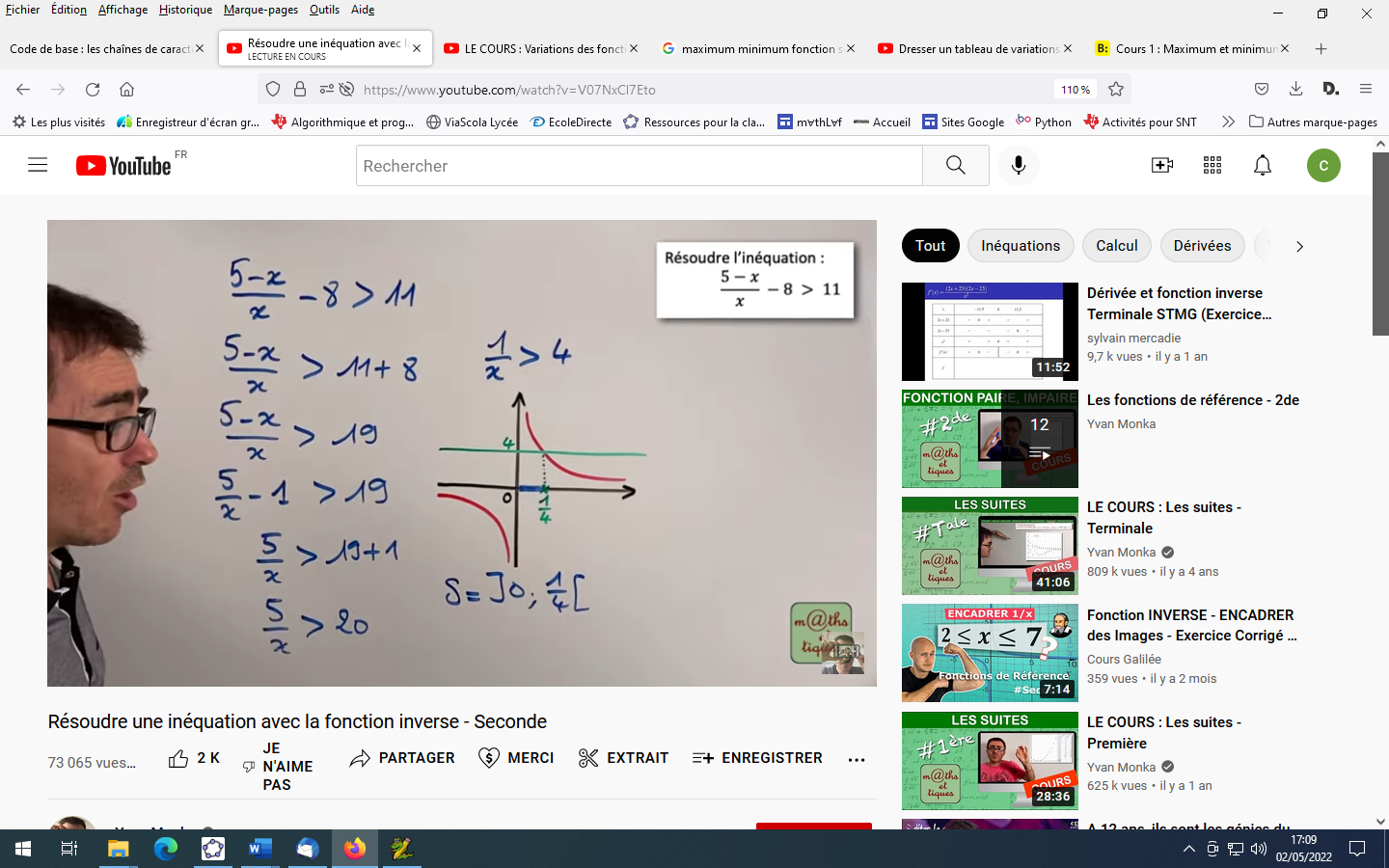
- La décroissance sur l’intervalle est prouvée de manière analogue.

**Tableau de variations**

|  |  |
| --- | --- |
|  | -∞ 0 +∞ |
|  |  |

Résoudre une inéquation avec la fonction inverse :

**Vidéo :** [**mathssa.fr/ine6**](http://www.mathssa.fr/ine6)  7mns42

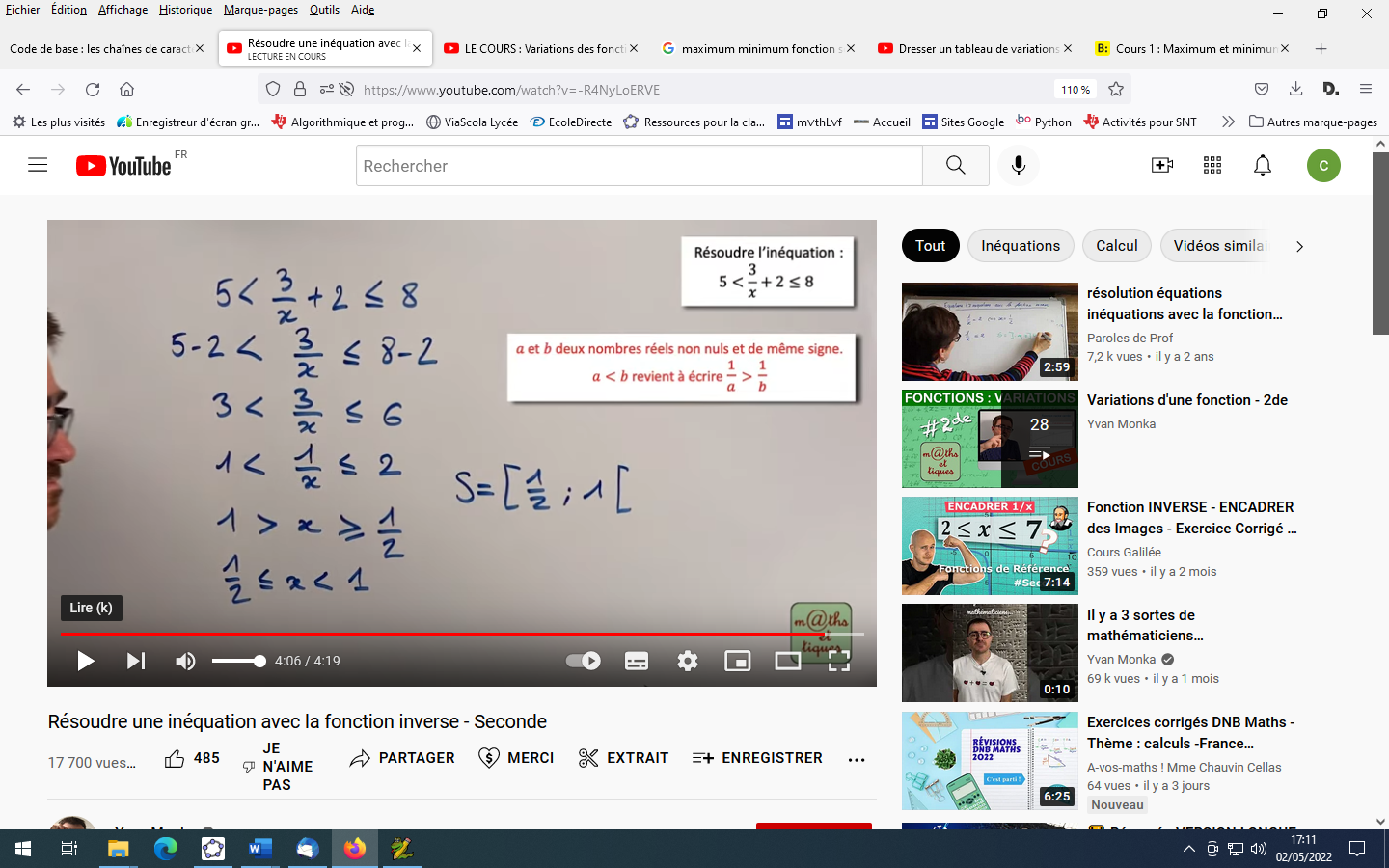


Propriété : et sont deux nombres réels de même signe, on a alors :

En effet, la fonction inverse étant décroissante, l’ordre est renversé.

Résoudre une inéquation avec la fonction inverse :

**Vidéo :** [**mathssa.fr/ine7**](http://www.mathssa.fr/ine7)  4mns17s



**III- La fonction racine carrée**

**1.Définition**

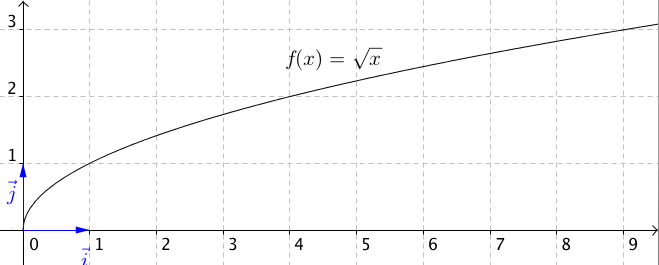
**Définition :** La **fonction racine carrée** est la fonction *f* définie sur par

.

Exemples : calcul d’images

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | –2 | –1 | 0 | 1 | 4 | 9 |
| *f*(*x*) |  |  | 0 | 1 | 2 | 3 |

**2.Représentation graphique**



Remarque : La fonction racine carrée n’est pas définie pour des valeurs négatives.

**3.Variations et conséquences**

**Propriété :**

La fonction racine carrée est croissante sur l’intervalle .

**Démonstration au programme :**

On pose : .

Vidéo : [mathssa.fr/ine10](http://www.mathssa.fr/ine10) 7mns25s

On pose : .

Soit *a* et *b* deux nombres réels positifs tels que *a* < *b*.

= = .

Or > 0 et *b* – *a* > 0. Donc

Donc .

Ce qui prouve que *f* est croissante sur l’intervalle .

**Tableau de variations**

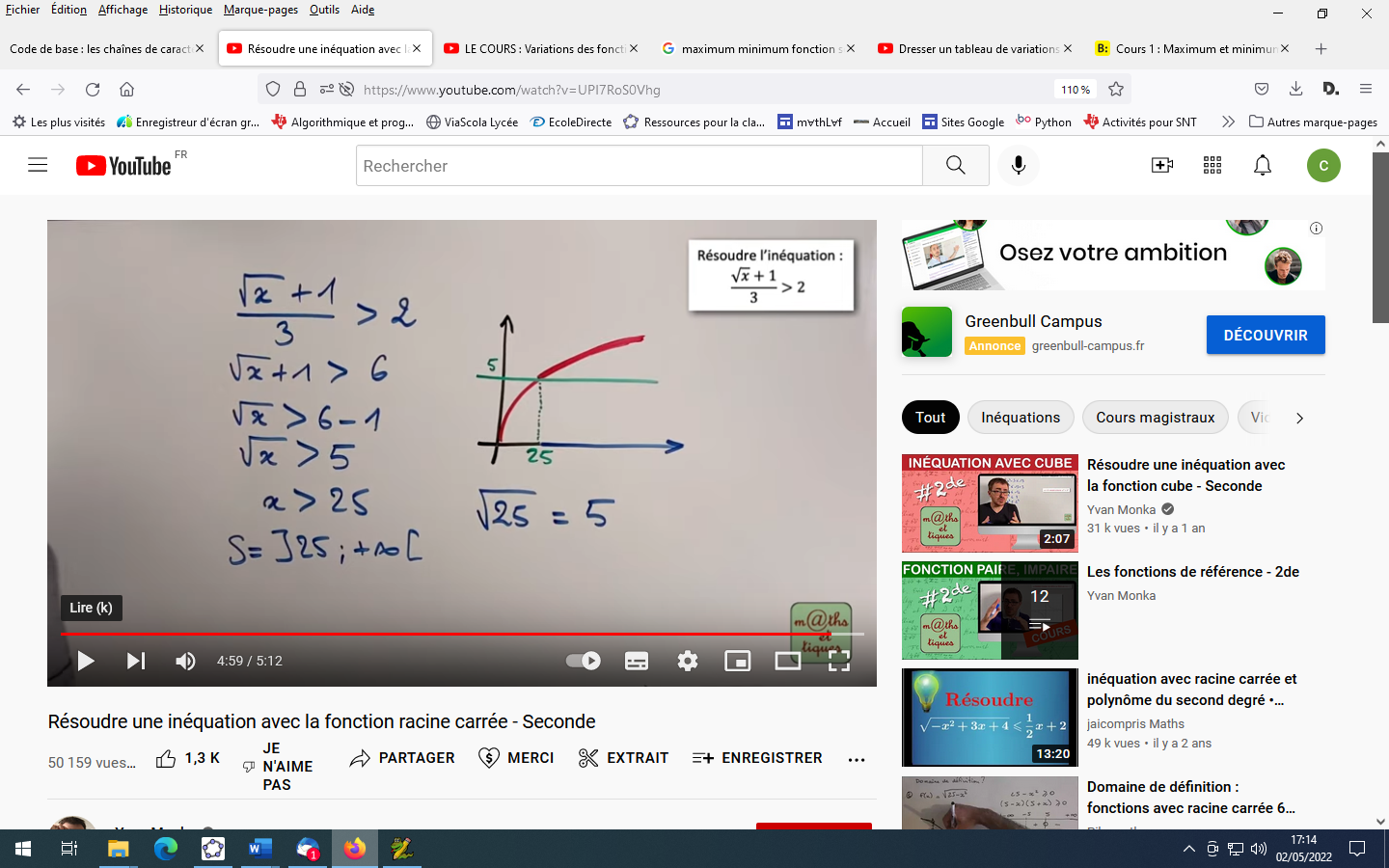
|  |  |
| --- | --- |
|  | 0 +∞ |
|  | 0 |

Propriété : Si et sont deux nombres réels positifs, on a alors :

En effet, la fonction racine carrée étant croissante, l’ordre est conservé.

Résoudre une inéquation avec la fonction racine carrée :

Vidéo : [mathssa.fr/ine8](http://www.mathssa.fr/ine8)  5mns12s



**IV- La fonction cube**

**1.Définition**

**Définition :** La **fonction cube** est la fonction *f* définie sur par .

Exemples : calcul d’images

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 |
| *f*(*x*) | -8 | -1 | 0 | 1 | 8 |

**2.Parité :**

**Propriété:**

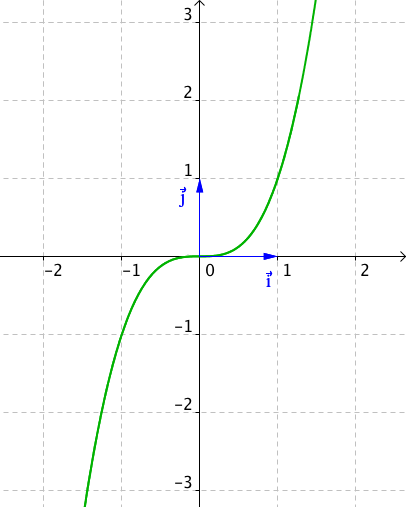
**l**a **fonction cube** est impaire.

**Preuve :**

Pour tout réel ,

**Conséquence graphique :**

Dans un repère orthogonal, la courbe de la fonction cube admet l’origine O comme centre de symétrie.

****

**3.Représentation graphique**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 |
| *f* (*x*) | -8 | -1 | 0 | 1 | 8 |

.

**3.Variations et conséquences**

**Propriété :**

La fonction cube est croissante sur ℝ

Preuve : admis

**Tableau de variations et tableau de signe**

|  |  |
| --- | --- |
|  | -∞ a 0 b +∞ |
|  | 0 |

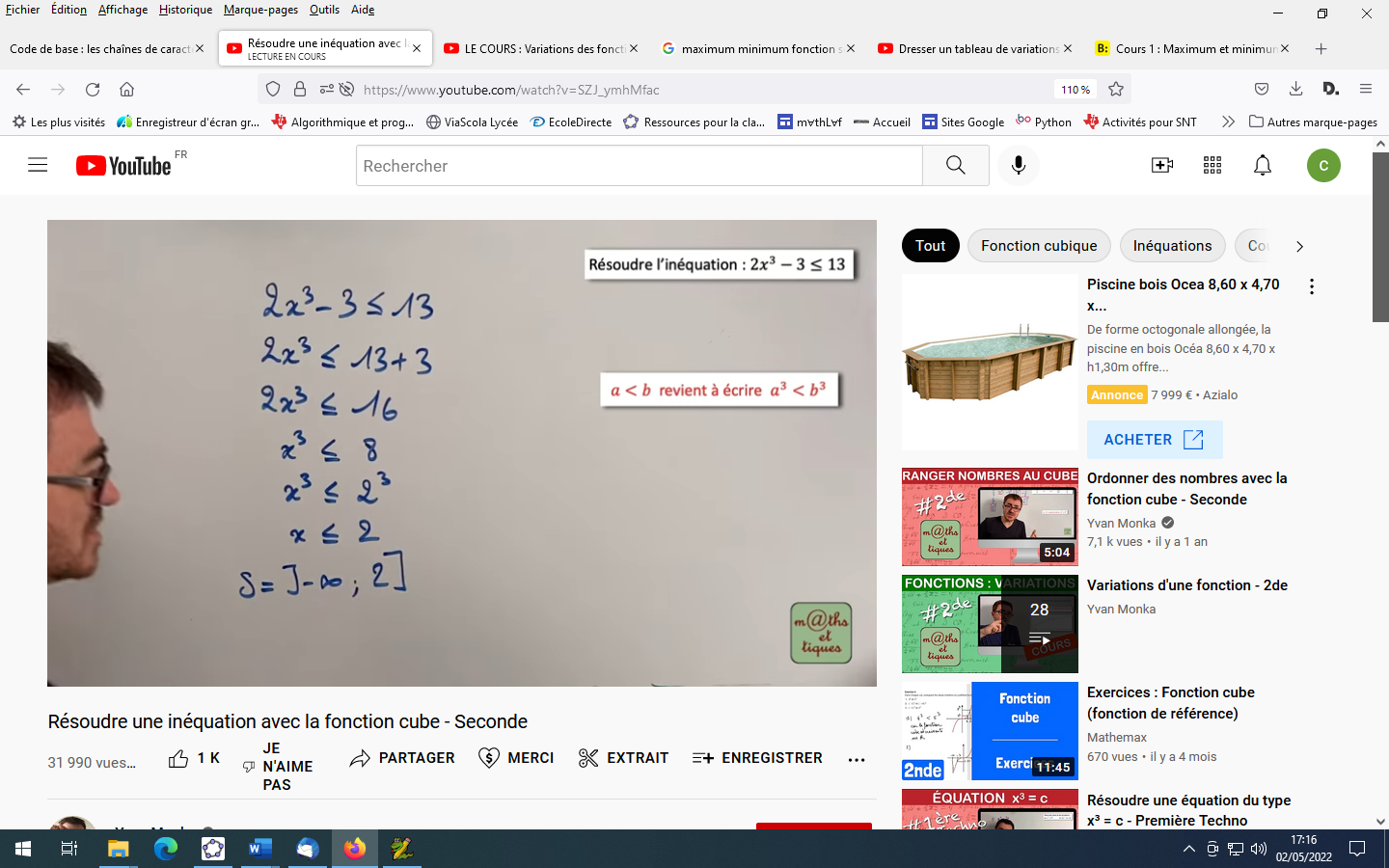
|  |  |
| --- | --- |
|  | -∞ 0 +∞ |
|  | - 0 + |

**Propriété :**

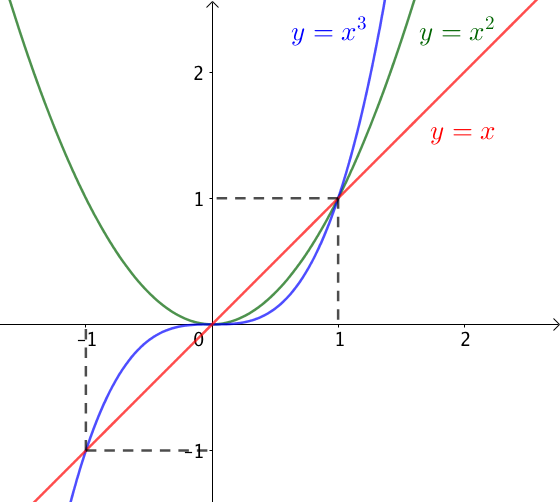
En effet, la fonction cube étant croissante, l’ordre est conservé.

Résoudre une inéquation avec la fonction cube :

Vidéo : [mathssa.fr/ine11](http://www.mathssa.fr/ine11)



**4.Positions relatives des courbes d’équations : , et**



Pour des valeurs positives de *x*, on a :

* Si  : La courbe d’équation se trouve au-dessus de

la courbe d’équation qui se trouve elle-même au-dessus de

la courbe d’équation .

* Si  : L’ordre précédent est inversé.

**Démonstration au programme :**

Vidéo [mathssa.fr/ine9](http://www.mathssa.fr/ine9)  8mns38s

1er cas : si  :

- Pour étudier les positions relatives des courbes d’équations et ,

il suffit d’étudier le signe de .

Or, car .

Donc, la courbe d’équation se trouve au-dessus de la courbe d’équation

.

- Pour étudier les positions relatives des courbes d’équations et ,

il suffit d’étudier le signe de .

Or, car .

Donc la courbe d’équation se trouve au-dessus de la courbe d’équation

.

2e cas : si   :

- Dans ce cas, car et .

Donc, la courbe d’équation se trouve en dessous de la courbe d’équation

.

- Et, car .

Donc la courbe d’équation se trouve en dessous de la courbe d’équation

.