

Chapitre 14 : les fonctions de référence

I- Fonction paire et impaire :

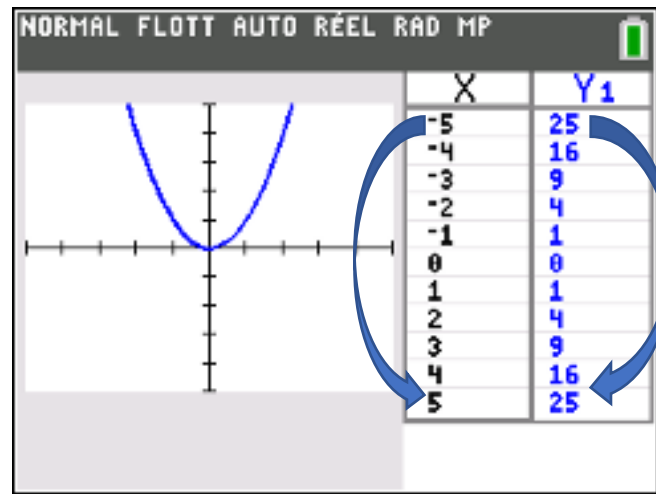
vidéo : mathssa.fr/paritefct.html (jusqu'à 6mns et 25 secondes)

Exemple 1 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Obtenir à l'aide de sa calculatrice, l'écran ci-dessous :

1. Quelle conjecture peut-on émettre concernant $f(-x)$? Il semble **que $f(-x) = f(x)$** .
2. Compléter le calcul
 $f(-x) = (-x)^2 = (-x) \times (-x) = +x^2 = f(x)$
3. Quelle particularité observe t'on quand regarde la courbe de f ?

La courbe de f admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

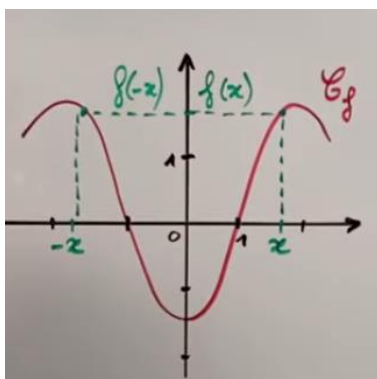
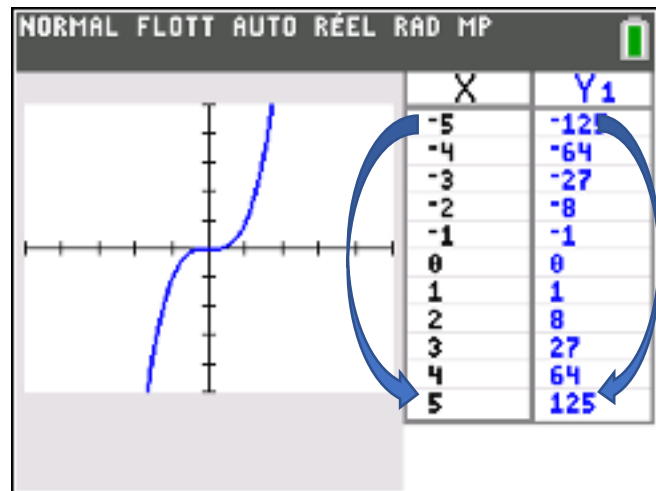


Exemple 2 :

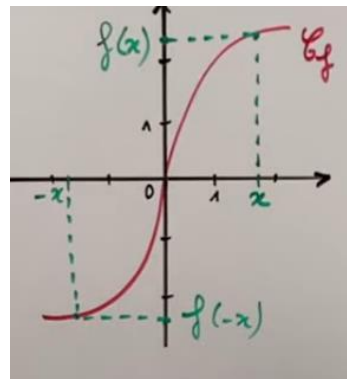
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$. Obtenir à l'aide de sa calculatrice, l'écran ci-dessous :

1. Quelle conjecture peut-on émettre concernant $f(-x)$? Il semble **que $f(-x) = -f(x)$** .
2. Compléter le calcul
 $f(-x) = (-x)^3 = (-x) \times (-x) \times (-x) = -x^3 = -f(x)$
3. Quelle particularité observe t'on quand regarde la courbe de f ?

La courbe de f admet l'origine O comme centre de symétrie.



f est paire



f est impaire

Définition: f est la fonction définie sur D dont le centre est 0.

Une fonction f est paire lorsque pour tout réel x de D , $f(-x) = f(x)$.
 (tout nombre et son opposé **ont la même image**)

Une fonction f est impaire lorsque pour tout réel x de D , $f(-x) = -f(x)$.
 (tout nombre et son opposé **ont des images opposés**)

Remarque : Dans un repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction paire admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie. Dans un repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction impaire admet le centre O du repère comme centre de symétrie.

I- La fonction carré

1. Définition

Définition :

La **fonction carré** f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

Exemples : calcul d'images

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	4	1	0	1	4

2. Parité :

Propriété:

la **fonction carré** f est paire.

Preuve :

Pour tout réel x , $f(-x) = (-x)^2 = (-x) \times (-x) = +x^2 = f(x)$

Conséquence graphique :

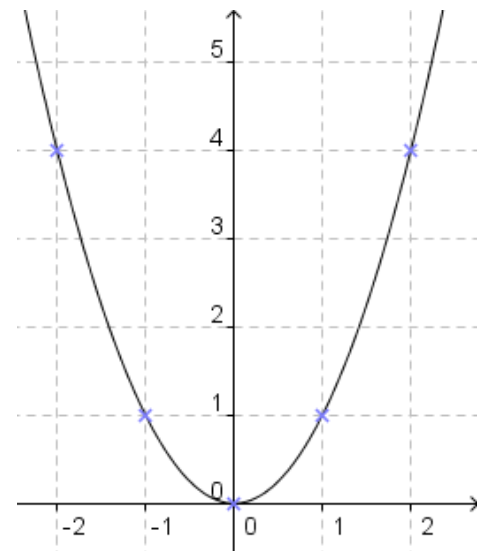
Dans un repère orthogonal, la courbe de la fonction carré admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

3. Représentation graphique

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	4	1	0	1	4

Remarques :

- Le tableau de valeurs n'est pas un tableau de proportionnalité. La fonction carré n'est donc pas une fonction linéaire.
- Dans un repère (O, I, J), la courbe d'équation $y = x^2$ de la fonction carré est appelée une **parabole** de sommet O.

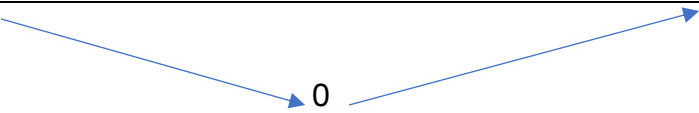


4. Variations et conséquences

Propriété :

La **fonction carré** f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$ et croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Tableau de variations

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) = x^2$			

Conséquence : la fonction carrée admet un minimum en $x = 0$ de valeur $f(0) = 0$

Tableau de signe

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) = x^2$	+	0	+

La fonction carrée est strictement positive sauf en 0 où elle s'annule.

Démonstration au programme :

Vidéo : mathssa.fr/ine3

On pose : $f(x) = x^2$.

- Soit a et b deux nombres réels quelconques positifs tels que $a < b$.

$$f(b) - f(a) = b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$$

Or $b - a > 0$, $a \geq 0$ et $b \geq 0$ donc $f(b) - f(a) \geq 0$ ce qui prouve que f est croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

- La décroissance sur l'intervalle $] -\infty ; 0]$ est prouvée de manière analogue en choisissant a et b deux nombres réels quelconques négatifs tels que $a < b$.

Propriété : a et b sont deux nombres réels, on a alors :

Si $0 < a < b$ alors $a^2 < b^2$

Si $a < b < 0$ alors $a^2 > b^2$

4. Equation du type $x^2 = a$ ($a > 0$)**Propriété :**

L'équation $x^2 = a$ avec $a > 0$ admet exactement 2 solutions $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$

Preuve :

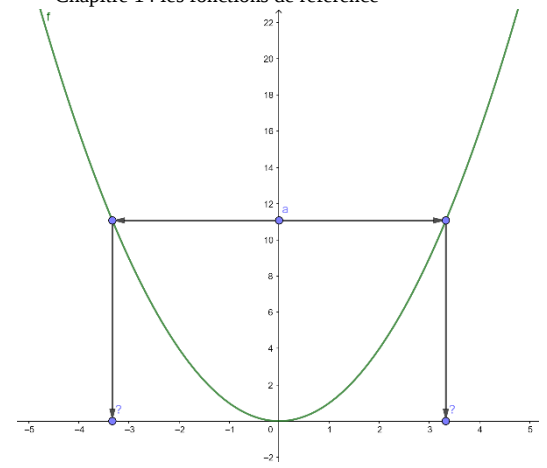
$$x^2 = a \text{ équivaut à } x^2 - a = 0$$

$$\text{équivaut à } x^2 - (\sqrt{a})^2 = 0$$

$$\text{équivaut à } (x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) = 0$$

$$\text{équivaut à } x - \sqrt{a} = 0 \text{ ou } x + \sqrt{a} = 0$$

$$\text{équivaut à } x = \sqrt{a} \text{ ou } x = -\sqrt{a}$$

Application :Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 = 5$.Les solutions sont $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$ $S = \{\sqrt{5}; -\sqrt{5}\}$ **5. Inéquation du type $x^2 < a$ ou $x^2 > a$ ($a > 0$)**Propriété :L'inéquation $x^2 < a$ avec $a > 0$ admet pour solutions les réels de l'intervalle $] -\sqrt{a}; \sqrt{a}[$.L'inéquation $x^2 > a$ avec $a > 0$ admet pour solutions les réels de l'intervalle $] -\infty; -\sqrt{a}[\cup]\sqrt{a}; +\infty[$ Preuve :

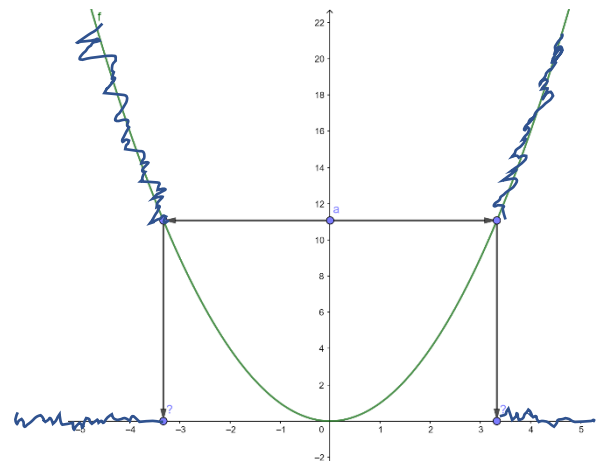
$$x^2 > a \text{ équivaut à } x^2 - a > 0$$

$$\text{équivaut à } x^2 - (\sqrt{a})^2 > 0$$

$$\text{équivaut à } (x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) > 0$$

$$\begin{aligned} x - \sqrt{a} &> 0 \\ x &> \sqrt{a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - \sqrt{a} &< 0 \\ x &< \sqrt{a} \end{aligned}$$



x	$-\infty$	$-\sqrt{a}$	$\sqrt{a}$	$+\infty$		
$x - \sqrt{a}$	-		-	0	+	
$x + \sqrt{a}$	-		0	+	+	
$(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a})$	+		0	-	0	+

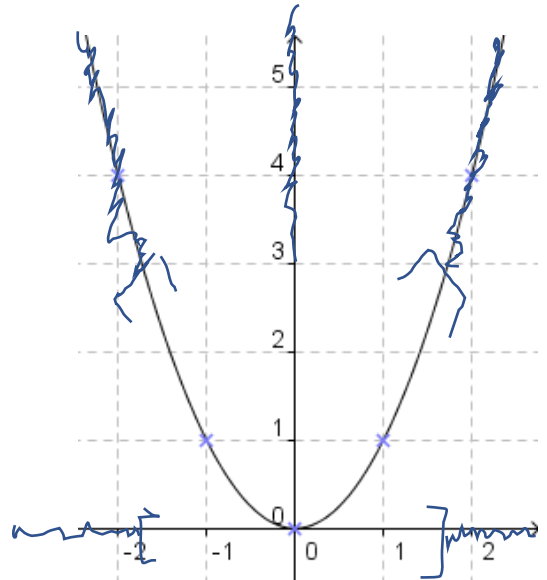
$$(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) > 0 \text{ lorsque } x \in] -\infty; -\sqrt{a}[\cup]\sqrt{a}; +\infty[$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation $(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) > 0$ est $x \in] -\infty; -\sqrt{a}[\cup]\sqrt{a}; +\infty[$

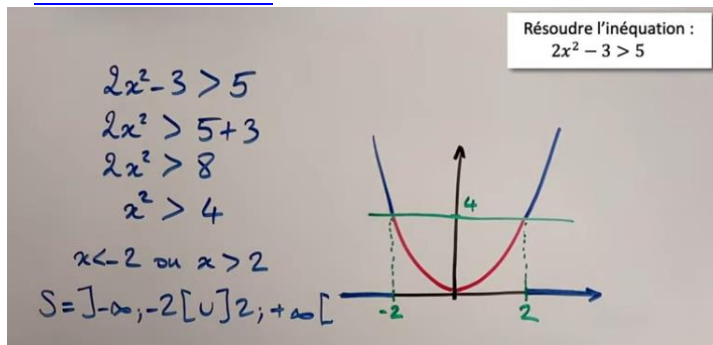
Application :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2 > 3$.

$$S =]-\infty; -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}; +\infty[$$

Résoudre une inéquation avec la fonction carré :

Vidéo : mathssa.fr/ine4 4mns12s

Exercice :

Une entreprise fabrique et vend chaque mois entre 50 et 100 vélos.

Le prix en € de vente d'un vélo, est $p = x - 40$ où x est le nombre de vélos fabriqués ($50 \leq x \leq 100$)

Le montant, en €, des dépenses pour la fabrication de x vélos est $d = 4900 - 40x$.

On suppose que l'entreprise vend l'ensemble des vélos fabriqués.

1. Démontrer que la recette de la société est $R = x^2 - 40x$. ($50 \leq x \leq 100$)

2. Déterminer, à partir de combien de vélos fabriqués l'entreprise réalise un bénéfice. (on admettra que les recettes et les dépenses varient entre 0 et 6000 – on réalise un bénéfice dès que $R > d$)

1. $R = x \times p(x) = x(x - 40) = x^2 - 40x$. ($50 \leq x \leq 100$)

2. On résout l'inéquation $R > d$.

$$x^2 - 40x > 4900 - 40x$$

$$x^2 - 40x + 40x > 4900 - 40x + 40x$$

$$x^2 > 4900$$

$$x > \sqrt{4900} \text{ ou } x < -\sqrt{4900}$$

$$x > 70 \text{ ou } x < -70 \text{ (impossible)}$$

$$x > 70$$

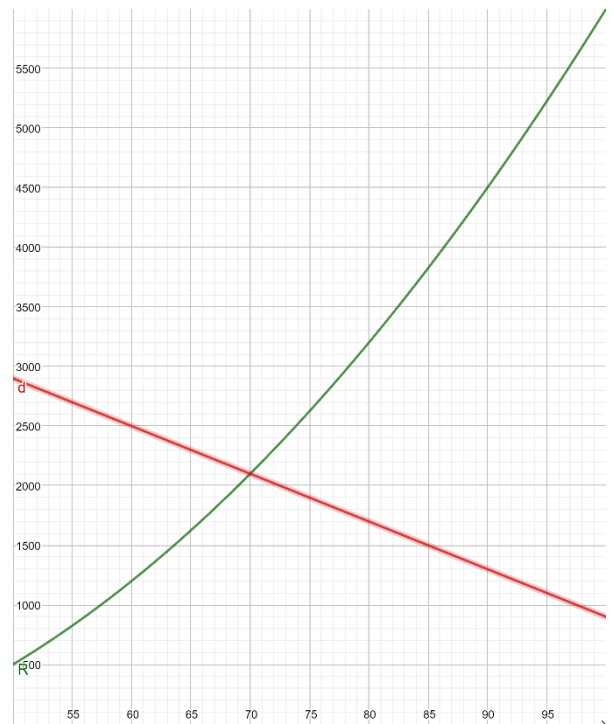
$$x \geq 71$$

Il faut donc produire au minimum 71 vélos.

On représente les courbes de R et de d à l'écran de la calculatrice (on prend $[50 ; 100]$ pour x et $[0 ; 6000]$ pour y)

On résout l'inéquation $R > d$.

On retrouve $x > 70$. Il faut donc produire au minimum 71 vélos



II- La fonction inverse

1. Définition

Définition :

La **fonction inverse** f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

Remarques :

- $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ désigne l'ensemble des nombres réels sauf 0, c'est-à-dire $] -\infty ; 0 [\cup] 0 ; +\infty [$. On peut aussi noter cet ensemble $\mathbb{R}^*$.
- La fonction inverse n'est pas définie en 0.

Exemples : calcul d'images

x	-2	-1	0,25	1	2	3
$f(x)$	-0,5	-1	4	1	0,5	$\frac{1}{3}$ $\approx 0,33$

2. Parité :

Propriété:

la **fonction inverse** est impaire.

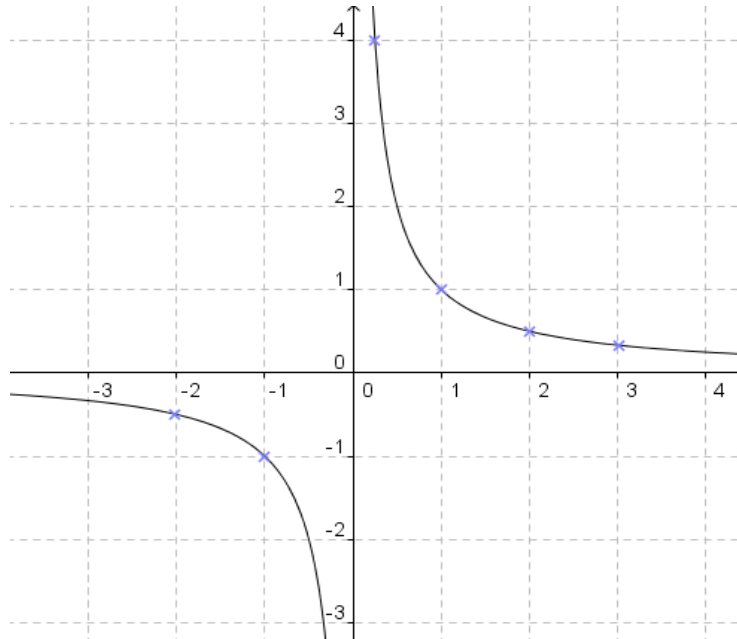
Preuve : Pour tout réel x , $f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$

Conséquence graphique :

Dans un repère orthogonal, la courbe de la fonction inverse admet l'origine O comme centre de symétrie.

3.Représentation graphique

x	-2	-1	0,25	1	2	3
$f(x)$	-0,5	-1	4	1	0,5	$\frac{1}{3}$



Remarque : Dans un repère (O, I, J) , la courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$ de la fonction inverse est une **hyperbole** de centre O .

4.Variations et conséquences

Propriété :

La fonction inverse est décroissante sur l'intervalle $]-\infty ; 0[$ et décroissante sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

Remarque :

La variation d'une fonction ne peut s'étudier que sur un intervalle.

On ne peut donc pas évoquer de décroissance sur $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$ qui n'est pas un intervalle mais conclure de manière séparée que la fonction inverse est décroissante sur l'intervalle $]-\infty ; 0[$ et décroissante sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

Démonstration au programme :

Vidéo : mathssa.fr/ine5 7mns37s

On pose : $f(x) = \frac{1}{x}$.

Soit a et b deux nombres réels strictement positifs avec $a < b$.

$$f(b) - f(a) = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab}$$

Or $a > 0$, $b > 0$ et $a - b < 0$. Donc $f(b) - f(a) \leq 0$.

f est ainsi décroissante sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

- La décroissance sur l'intervalle $]-\infty ; 0[$ est prouvée de manière analogue.

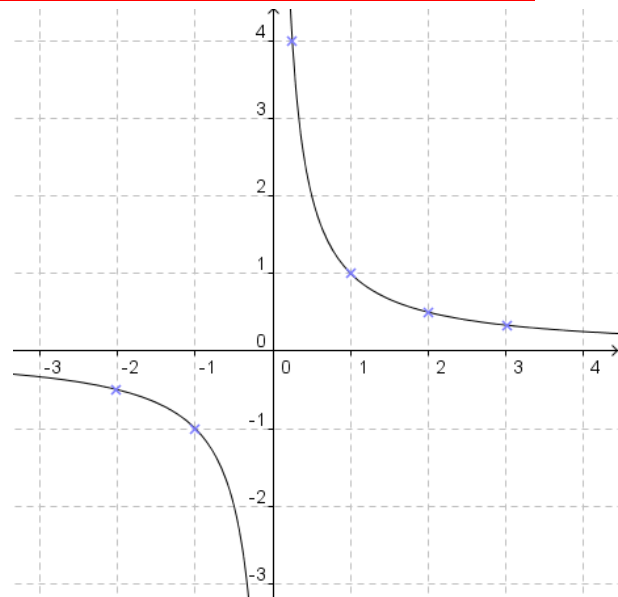
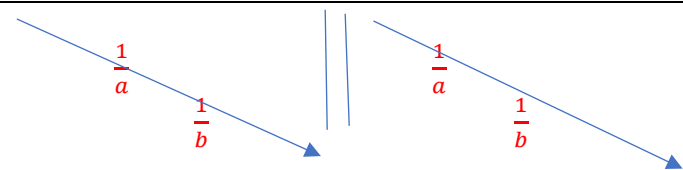
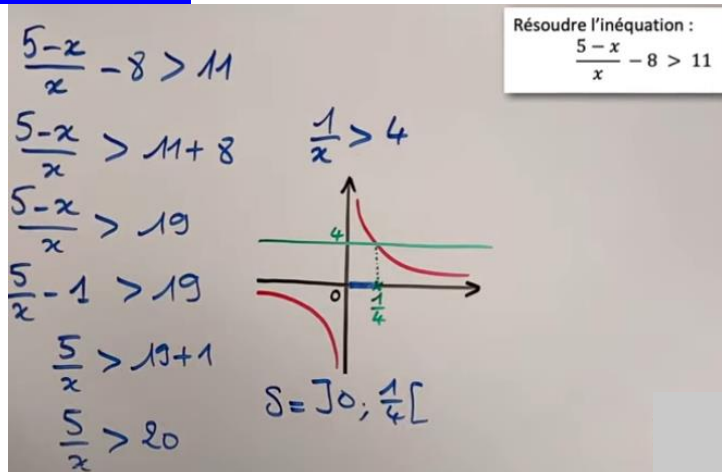


Tableau de variations

x	$-\infty$	a	b	0	a	b	$+\infty$
$f(x) = x^2$							

Résoudre une inéquation avec la fonction inverse :

Vidéo : mathssa.fr/ine6 7mns42



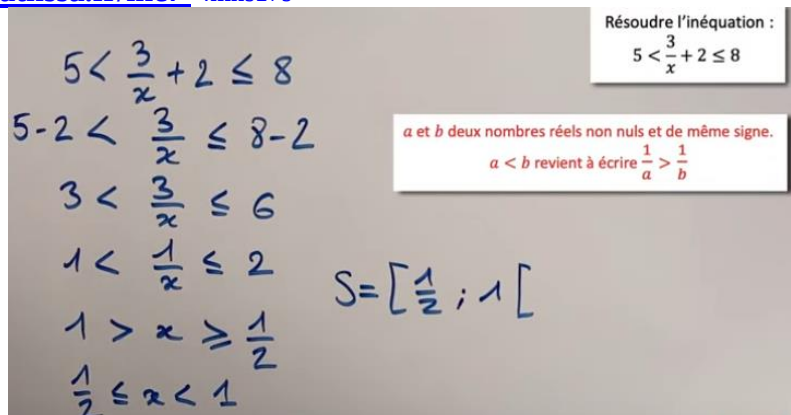
Propriété : a et b sont deux nombres réels de même signe, on a alors :

$a < b$ revient à écrire $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

En effet, la fonction inverse étant décroissante, l'ordre est renversé.

Résoudre une inéquation avec la fonction inverse :

Vidéo : mathssa.fr/ine7 4mns17s

**III- La fonction racine carrée****1.Définition**

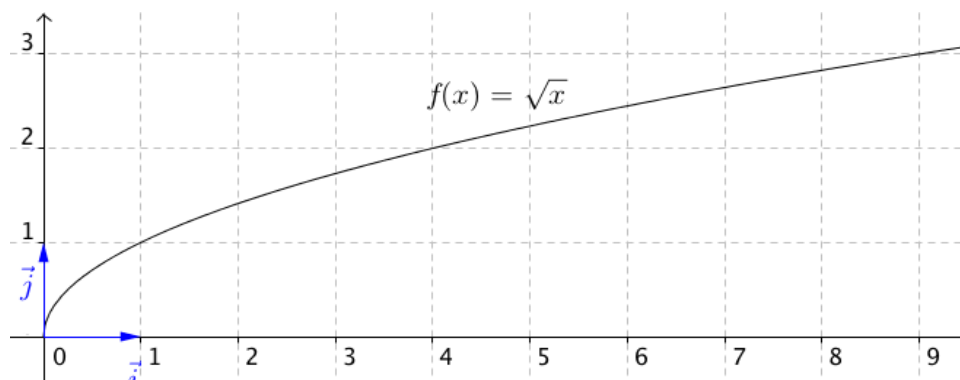
Définition : La fonction racine carrée est la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{x}.$$

Exemples : calcul d'images

x	-2	-1	0	1	4	9
$f(x)$			0	1	2	3

2.Représentation graphique



Remarque : La fonction racine carrée n'est pas définie pour des valeurs négatives.

3.Variations et conséquences

Propriété :

La fonction racine carrée est croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Démonstration au programme :

On pose : $f(x) = \sqrt{x}$.

Vidéo : mathssa.fr/ine10 7mns25s

On pose : $f(x) = \sqrt{x}$.

Soit a et b deux nombres réels positifs tels que $a < b$.

$$f(b) - f(a) = \sqrt{b} - \sqrt{a} = \frac{(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a})}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{b}^2 - \sqrt{a}^2}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} = \frac{b - a}{\sqrt{b} + \sqrt{a}}.$$

Or $\sqrt{b} + \sqrt{a} > 0$ et $b - a > 0$. Donc $f(b) - f(a) > 0$

Donc $f(a) < f(b)$.

Ce qui prouve que f est croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Tableau de variations

x	0	a	b	$+\infty$
$f(x)$ $= \sqrt{x}$	0	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	

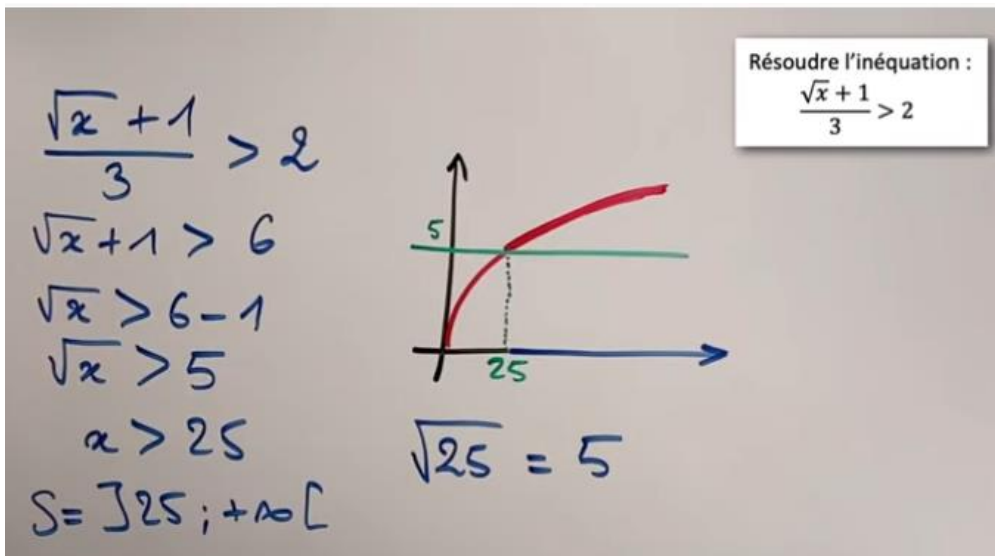
Propriété : Si a et b sont deux nombres réels positifs, on a alors :

$a < b$ revient à écrire $\sqrt{a} < \sqrt{b}$

En effet, la fonction racine carrée étant croissante, l'ordre est conservé.

Résoudre une inéquation avec la fonction racine carrée :

Vidéo : mathssa.fr/ine8 5mns12s



IV- La fonction cube

1. Définition

Définition : La fonction cube est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

Exemples : calcul d'images

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-8	-1	0	1	8

2. Parité :

Propriété :

la fonction cube est impaire.

Preuve :

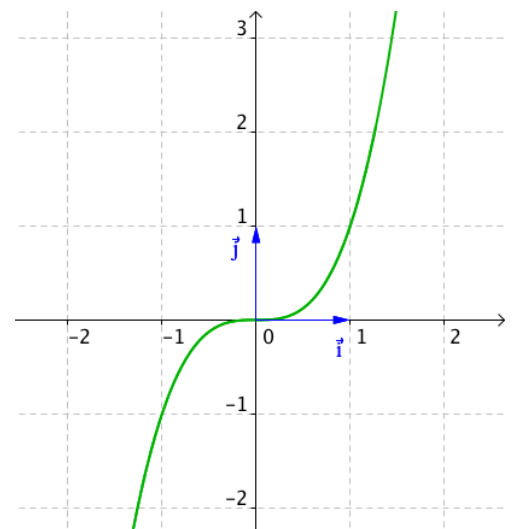
Pour tout réel x , $f(-x) = (-x)^3 = (-x)(-x)(-x) = -x^3 = -f(x)$

Conséquence graphique :

Dans un repère orthogonal, la courbe de la fonction cube admet l'origine O comme centre de symétrie.

3. Représentation graphique

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-8	-1	0	1	8



3. Variations et conséquences

Propriété :

La fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$

Preuve : admis

Tableau de variations et tableau de signe

x	$-\infty$	a	0	b	$+\infty$
$f(x) = x^3$					

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) = x^3$	-	0	+

Propriété :

$a < b$ revient à écrire $a^3 < b^3$

En effet, la fonction cube étant croissante, l'ordre est conservé.

Résoudre une inéquation avec la fonction cube :

Vidéo : mathssa.fr/ine11

Résoudre l'inéquation : $2x^3 - 3 \leq 13$

$$2x^3 - 3 \leq 13$$

$$2x^3 \leq 13 + 3$$

$$2x^3 \leq 16$$

$$x^3 \leq 8$$

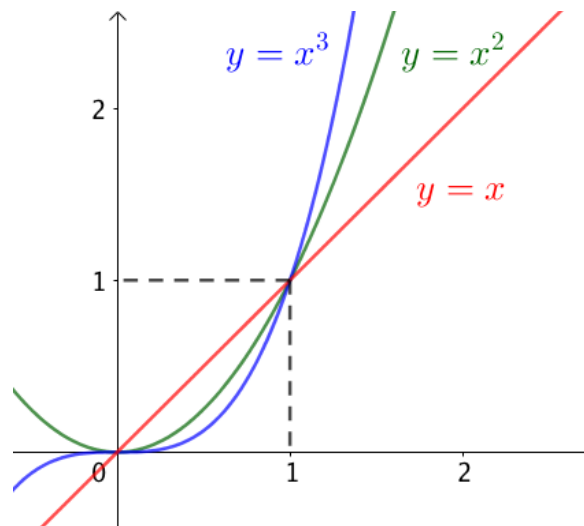
$$x^3 \leq 2^3$$

$$x \leq 2$$

$$S =]-\infty; 2]$$

$a < b$ revient à écrire $a^3 < b^3$

4.Positions relatives des courbes d'équations : $y = x$, $y = x^2$ et $y = x^3$



Pour des valeurs positives de x , on a :

- Si $x \geq 1$: La courbe d'équation $y = x^3$ se trouve au-dessus de la courbe d'équation $y = x^2$ qui se trouve elle-même au-dessus de la courbe d'équation $y = x$.
- Si $0 \leq x \leq 1$: L'ordre précédent est inversé.

Démonstration au programme :

Vidéo mathssa.fr/ine9 8mns38s

1^{er} cas : si $x \geq 1$:

- Pour étudier les positions relatives des courbes d'équations $y = x$ et $y = x^2$, il suffit d'étudier le signe de $x^2 - x$.

Or, $x^2 - x = x(x - 1) \geq 0$ car $x \geq 1$.

Donc, la courbe d'équation $y = x^2$ se trouve au-dessus de la courbe d'équation $y = x$.

- Pour étudier les positions relatives des courbes d'équations $y = x^2$ et $y = x^3$, il suffit d'étudier le signe de $x^3 - x^2$.

Or, $x^3 - x^2 = x^2(x - 1) \geq 0$ car $x \geq 1$.

Donc la courbe d'équation $y = x^3$ se trouve au-dessus de la courbe d'équation $y = x^2$.

2^e cas : si $0 \leq x \leq 1$:

- Dans ce cas, $x^2 - x = x(x - 1) \leq 0$ car $x \geq 0$ et $x - 1 \leq 0$.

Donc, la courbe d'équation $y = x^2$ se trouve en dessous de la courbe d'équation $y = x$.

- Et, $x^3 - x^2 = x^2(x - 1) \leq 0$ car $x - 1 \leq 0$.

Donc la courbe d'équation $y = x^3$ se trouve en dessous de la courbe d'équation $y = x^2$.