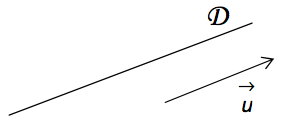
***Chapitre 15 équations de droites et systèmes***

**I- Equation cartésienne d’une droite**

Vidéo : mathssa.fr/equdroite (jusqu’à 6mns40s)

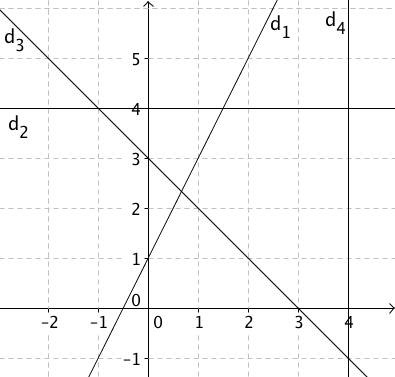
**1.Vecteur directeur d’une droite :**

**Définition :**   
*D* est une droite du plan.

On appelle vecteur directeur de *D* tout vecteur non nul qui

possède la même direction que la droite *D.*

Méthode : Déterminer graphiquement un vecteur directeur d’une droite



Vidéo : [mathssa.fr/vd](http://www.mathssa.fr/vd) (4mns12s)

Soit un repère du plan.

Donner des vecteurs directeurs des

droites d1, d2, d3 et d4.

Pour d1 :

Pour d2 :

Pour d3 :

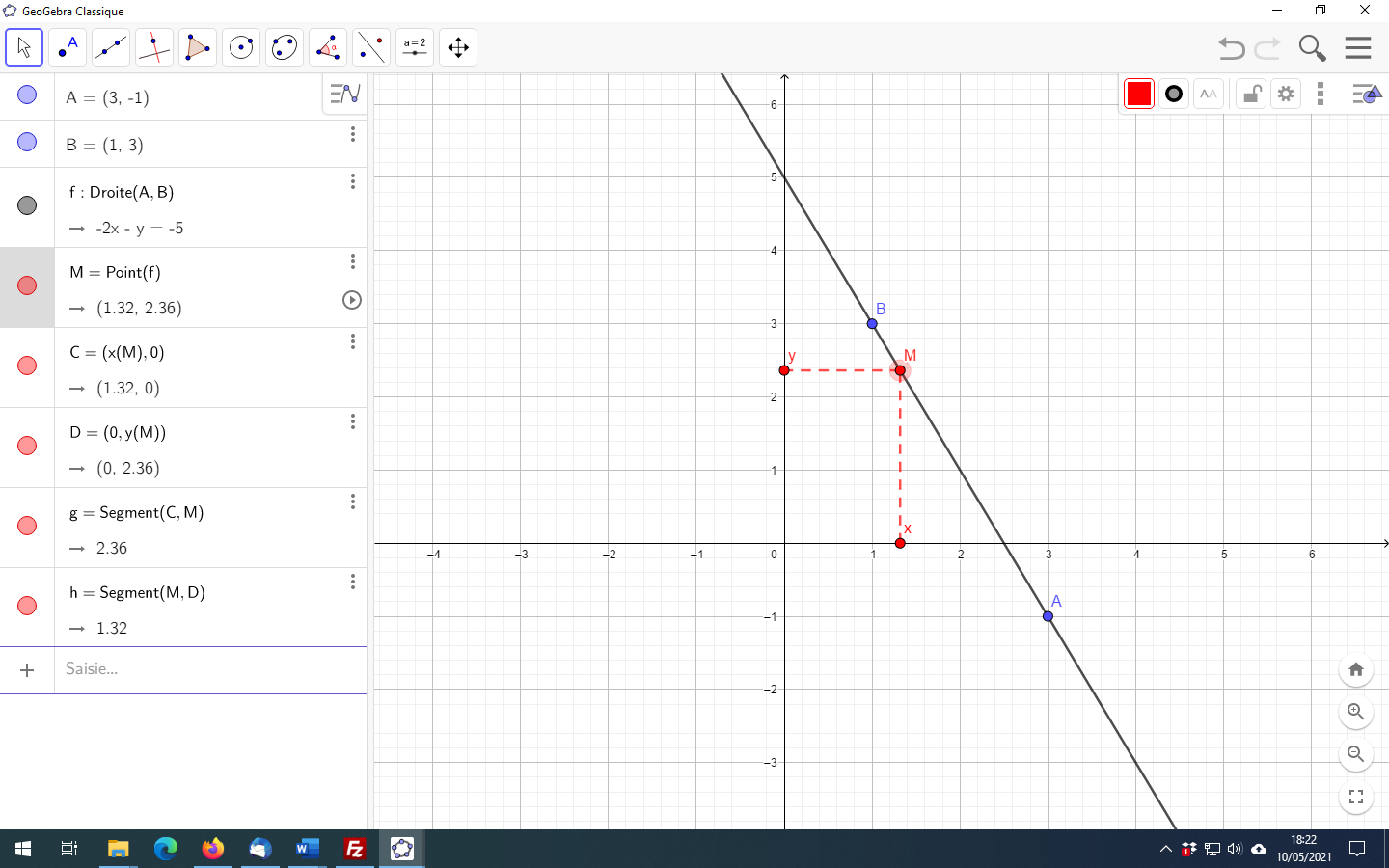
Pour d4 :

**2.Equation cartésienne d’une droite**

**Exercice corrigé :Vers les équations algébriques de droite…**

Dans un repère du plan , on se donne et . Soit M un point quelconque de la droite (AB) .

On pose .Cherchons une relation entre et .



Un vecteur directeur de la droite (AB) est

.

)

Calculons det (

det (

1)

Il est évident que les vecteurs sont colinéaires et donc que det(

On en déduit que

On dira qu’une équation cartésienne de la droite (AB) de vecteur directeur est

Plus généralement , une droite a une équation cartésienne du type

Un vecteur directeur aura pour coordonnées (- **b**; )

**Théorème et définition :**

Toute droite *D* admet une équation de la forme avec .

Un vecteur directeur de *D* est .

Cette équation est appelée **équation cartésienne** de la droite *D*.

**Démonstration au programme :**

Vidéo : [mathssa.fr/equacart](http://www.mathssa.fr/equacart)

Soit un point de la droite *D* et un vecteur directeur de *D*.

Un point M(*x* ; *y*) appartient à la droite *D* si et seulement si les vecteurs et sont colinéaires, soit soit encore .

Donc :

Cette équation peut s'écrire : avec et et .

Les coordonnées de sont donc .

Exemple :

Soit une droite *d* d'équation cartésienne .

Alors le vecteur de coordonnées soit est un vecteur directeur de *d*.

**Théorème réciproque :**

L'ensemble des points M(*x* ; *y*) tels que avec est une droite *D* de vecteur directeur .

*- Admis -*

Vidéos : [mathssa.fr/equacart2](http://www.mathssa.fr/equacart2) (3mns18s) [mathssa.fr/equacart3](http://www.mathssa.fr/equacart3)  (5mns)

Méthode : Déterminer une équation cartésienne de droite à partir d'un point et d'un vecteur directeur

On considère un repère du plan.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite *d* passant par le point *A*(3 ; 1) et de vecteur directeur (5 ; 3).

1.Ainsi, comme ) est un vecteur directeur de *d*, une équation de *d* est de la forme :

Pour déterminer *c*, il suffit de substituer les coordonnées de *A* dans l'équation.

d :

2. Déterminer une équation cartésienne de la droite *d'* passant par les points *B*(5 ; 3) et *C*(1 ; –3).

*B* et *C* appartiennent à *d’* donc est un vecteur directeur de *d'*.

On a :

Une équation cartésienne de *d'* est de la forme : .

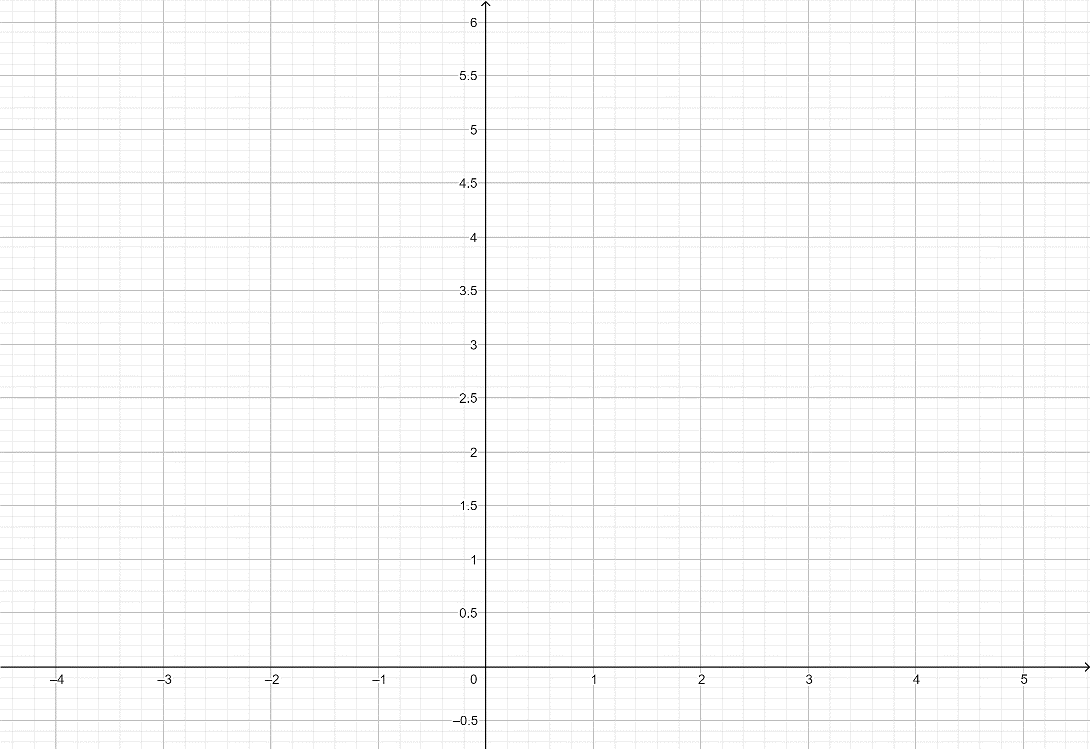
appartient à *d'* donc : soit

Une équation cartésienne de *d'* est : ou encore .

Méthode : Tracer une droite dont on connait une équation cartésienne

Vidéo : [mathssa.fr/equacart4](http://www.mathssa.fr/equacart4) (3mns44s)

Tracer la droite (d) d’équation cartésienne :



Alors le vecteur de coordonnées soit est un vecteur

directeur de *d*.

On remplace par .

A

A(0 ;2,5) appartient à la droite (d)

(d) est la droite passant par A et vecteur directeur

**II- Equation réduite et pente d’une droite**

Vidéo : [mathssa.fr/equdroite](http://www.mathssa.fr/equdroite)  (de 6mns 40s jusqu’à 13mns 30s)

**1.De l’équation cartésienne à l’équation réduite**

* Si , alors l'équation cartésienne de la droite *D* peut être ramenée à une équation réduite . Et on note et .

On obtient donc *y = mx+p*

Vocabulaire : - *m* est appelé la **pente** ou le **coefficient directeur** de la droite *D*.

- *p* est appelé l’**ordonnée à l’origine** de la droite *D*.

Remarque : Dans l’équation réduite, on retrouve l’expression d’une fonction affine.

* Si , alors l'équation cartésienne de la droite *D* peut être ramenée à l’équation réduite . Et on note . On obtient donc *x=n.*

Exemple 1: Soit *d* dont une droite d'équation cartésienne .

Son équation réduite est .Un vecteur directeur de est .

**Remarque :** si l’équation réduite d’une droite est alors un vecteur directeur de cette droite est

. De plus cette droite n’est pas parallèle à l’axe des ordonnées.

Exemple 2: Soit *d* dont une droite d'équation cartésienne .

Son équation réduite est .Un vecteur directeur de est

**Remarque :** si l’équation réduite d’une droite est alors cette droite est parallèle à l’axe des ordonnées.

|  |
| --- |
| **Propriété :**  Soit un repère du plan.Soit *D* une droite du plan.  - Si *D* est parallèle à l’axe des ordonnées :  alors l’équation de *D* est de la forme *x =n*,  où *n* est un nombre réel.  - Si *D* n’est pas parallèle à l’axe des ordonnées :  alors l’équation de *D* est de la forme *y = mx+p*,  où *m* et *p* sont deux nombres réels.  Un vecteur directeur de la droite D est alors |

Remarques :

Dans le cas où D n’est pas « verticale » , D est la représentation graphique de la fonction

définie sur par m est le coefficient directeur et p est l’ordonnée à l’origine

On rappelle que la droite passe par le point de coordonnées

et que partant d’un point de la droite , si on avance de +1 « horizontalement » puis de m « verticalement » , on retombe sur un point de la droite.

Un vecteur directeur de la droite D est alors

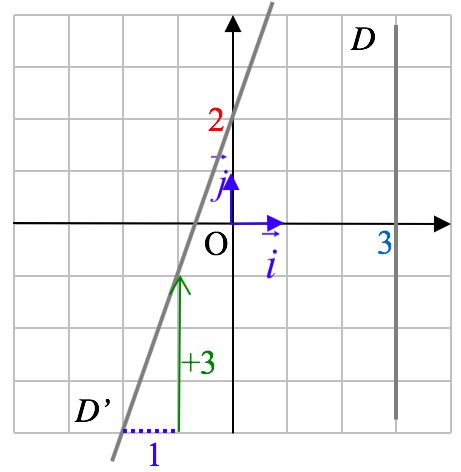
Exercice : Donner le coefficient directeur et l’ordonnée à l’origine de chacune des droites d’équations : a) b) c)

1. Coefficient directeur : -2 b) Coefficient directeur : 0

Ordonnée à l’origine : 3 Ordonnée à l’origine : 5

1. L’équation peut s’écrire : soit soit

Coefficient directeur : -2

 Ordonnée à l’origine :

Exemples :

La droite *D* a pour équation *x=3*

La droite *D’* a pour équation *y=mx+p=3x+2*

Son ordonnée à l’origine est p=2 et son coefficient directeur est m=3

**Propriété réciproque :**

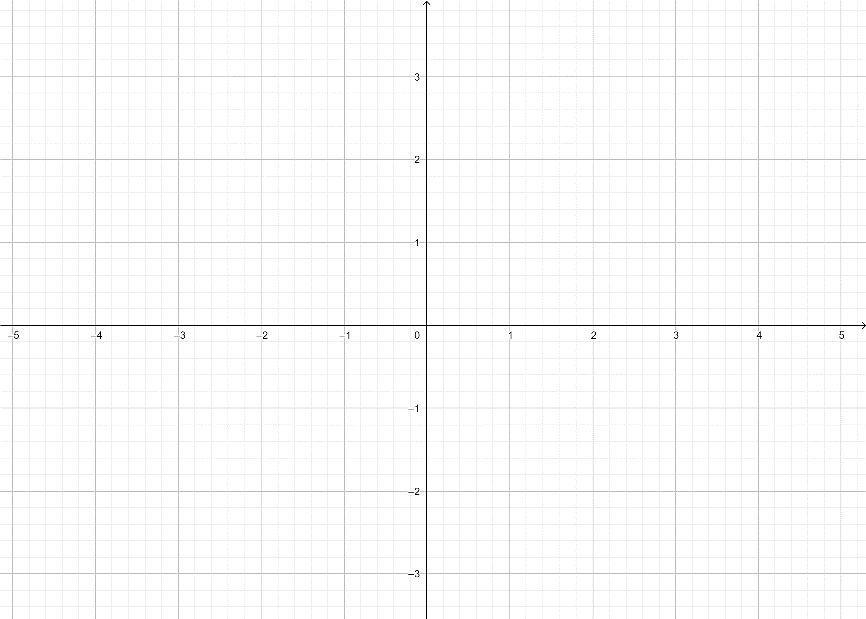
Soit un repère du plan et *m, p, n* trois nombres réels, *m* étant non nul.

L’ensemble des points M du plan dont les coordonnées sont tels que :

*y = mx + p* ou *x = n*, est une droite.

Exercice : Représenter graphiquement une droite d’équation réduite donnée

Soit un repère du plan.Dans un repère, tracer les droites *d1, d2* et *d3* d’équations réduites respectives : *y =* 2*x -* 3, *y =* 2, *x =* 3*.*

Soit la droite *d1* d’équation *y =* 2*x -* 3.

*d1* est une droite non parallèle à l’axe des ordonnées.

**Le coefficient directeur est m=2**

**L’ordonnée à l’origine est p=-3**

Ainsi la droite *d1* passe par le point

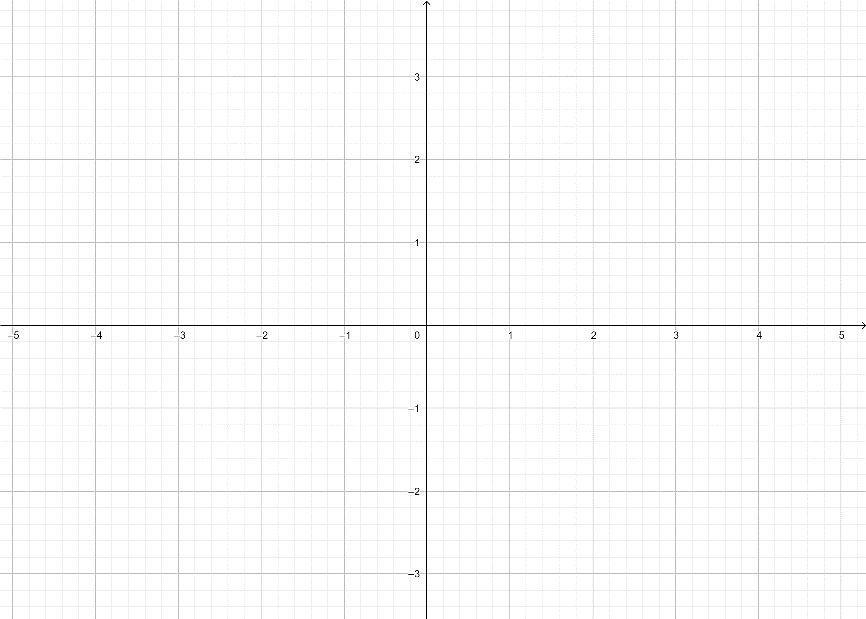
de coordonnées (0 ;-3)

Partant de ce point si on avance de

+1 « horizontalement » et de +2 « verticalement » , on retombe sur un deuxième point de la droite.

Soit la droite *d2* d’équation *y =* 2=

*d2* est une droite non parallèle à l’axe des ordonnées.

**Le coefficient directeur est m=0**

**L’ordonnée à l’origine est p=2**

Ainsi la droite *d2* passe par le point de coordonnées (0 ;2)

Partant de ce point si on avance de

+1 « horizontalement » puis de 0 « verticalement » , on retombe sur un deuxième point de la droite.

Soit la droite *d3* d’équation

*d3* est la droite parallèle à l’axe des ordonnées

passant par (3 ;0)

**2.Pente d’une droite**

Vidéo : [mathssa.fr/equdroite](http://www.mathssa.fr/equdroite)  (de 13mns 30s jusqu’à 16mns00)

**Propriété :**

Si A et B sont deux points distincts d’une droite *D* tel que alors la droite *D* a pour pente (ou coefficient directeur) *m* = .

Preuve : admis

Méthode : Déterminer une équation réduite de droite dont on connaît deux points

Vidéo : mathssa.fr/pente (4mns30s)

Soit un repère du plan.

Soit A et B deux points d’une droite *d*.

Déterminer une équation de la droite *d*.

Les points A et B sont d’abscisses différentes donc la droite *d* n’est pas parallèle à l’axe des ordonnées. Elle est donc de la forme *y = mx + p*, où *m* et *p* sont deux nombres réels.

Le coefficient directeur de *d* est *m* = = –6.

L’équation de *d* est donc de la forme : *y =* –6*x + p*

Comme A appartient à la droite *d*, ses coordonnées vérifient l’équation de *d* soit :

–1 = –6 × 4 + *p* soit soit

Une équation de *d* est donc : *y = –* 6*x +* 23*.*

**Remarque :** pour lire la pente d’une droite , on pourra remarquer que la pente est aussi égale à la formule .

Exercice : lire l’équation réduite des droites d1 et d2

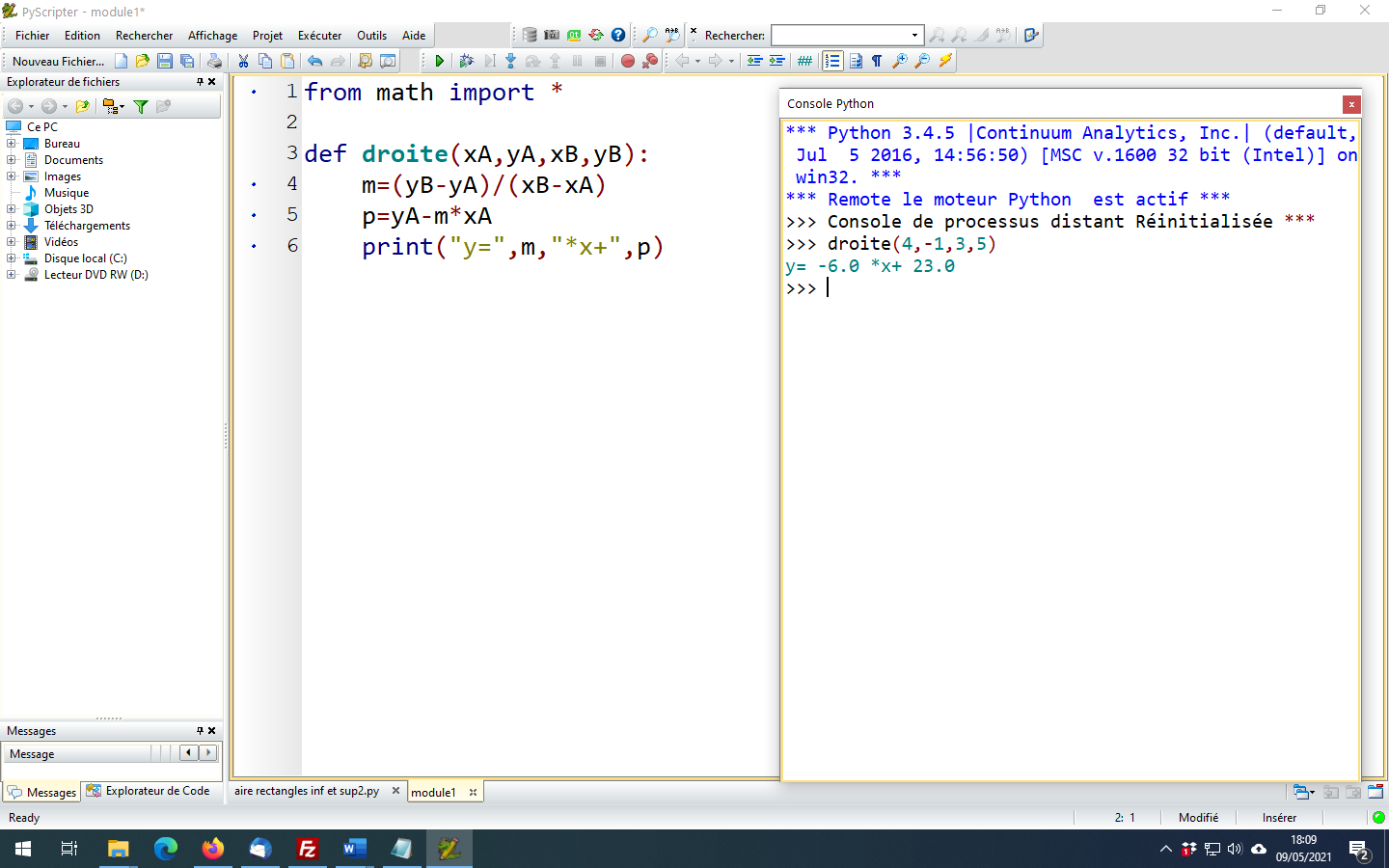
d2

d1

d1:

d2:

**ALGORITHME**



mathssa.fr/droite.py

**III- Position relative de deux droites**

Vidéo : [mathssa.fr/equdroite](http://www.mathssa.fr/equdroite)  (de 16mns jusqu’à la fin )

’

**1.Droites parallèles et vecteurs directeurs**

**Propriété :**

Soit un repère du plan.

Dire que *D* et *D’* sont parallèles entre-elles équivaut à dire qu’elles ont des vecteurs directeurs colinéaires.

Méthode : Démontrer que deux droites sont parallèles

Démontrer que les droites *d1* et *d2* d’équations respectives 6*x –* 10*y –* 5 *=* 0 () et

*–*9*x +* 15*y =* 0 *()*sont parallèles.

Le vecteur est un vecteur directeur de la droite *d1*.

Le vecteur est un vecteur directeur de la droite *d2*.

Calculons  :

Donc et sont colinéaires et donc les droites *d1* et *d2* sont parallèles.

Cas particulier : si on dispose de l’équation réduite de deux droites D et D’…

On suppose que D a pour équation réduite de vecteur directeur

et que D’ a pour équation réduite de vecteur directeur

D et D’ sont parallèles équivaut à

équivaut à

équivaut à

**2. Droites parallèles et équation réduite**

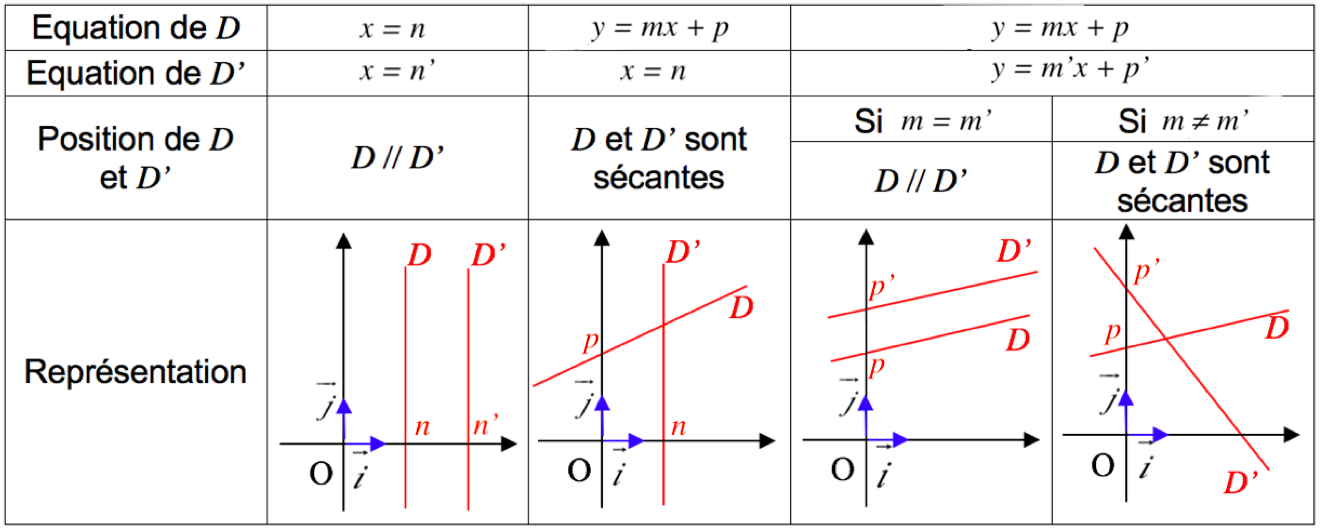
**Propriété :**

Soit un repère du plan.

Soit *D* et *D’* deux droites non parallèles à l’axe des ordonnées.

Dire que *D* et *D’* sont parallèles entre-elles équivaut à dire qu’elles ont le même coefficient directeur.

Tableau récapitulatif :



**Vidéo :** [**mathssa.fr/positiondroites**](http://www.mathssa.fr/positiondroites)

Exemples :

Dans un repère du plan, *d1, d2* et *d3* admettent pour équations respectives :

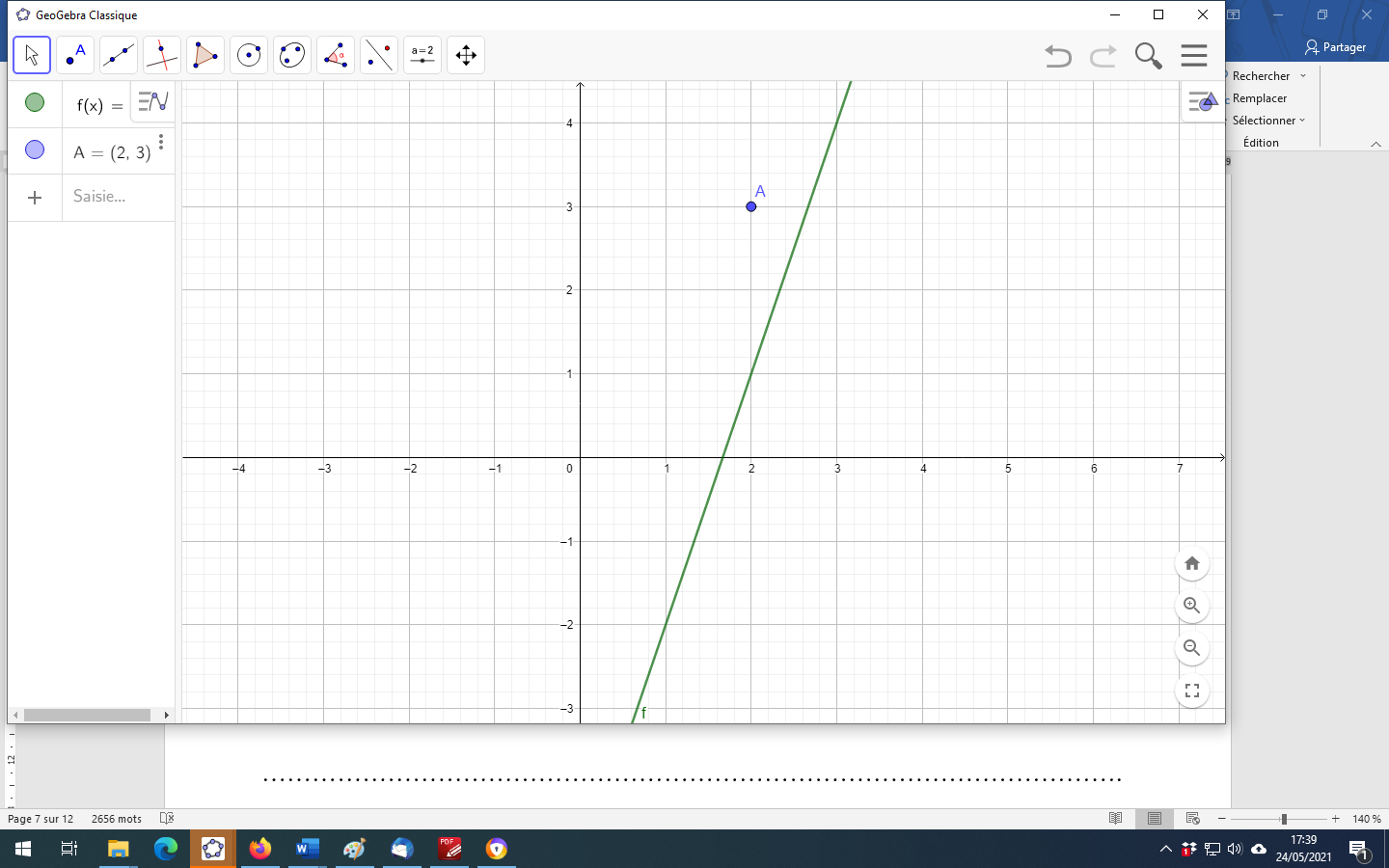
*y =* 3*x +* 4, *y =* 3*x +* 9, *x =* 8

Les droites *d1* et *d2* sont parallèles car elles ont un coefficient directeur égal à 3.

Les droites *d1* et *d3* sont sécantes.

**Exercice :**

1.Soit D la droite d’équation réduite :

Déterminer une équation de la droite D’ parallèle à D et passant par le point A(2 ;3).

1. Un coefficient directeur de la droite D est m=3

comme les droites D et D’ sont parallèles alors elles ont le même coefficient directeur 3.

La droite D’ a pour équation réduite

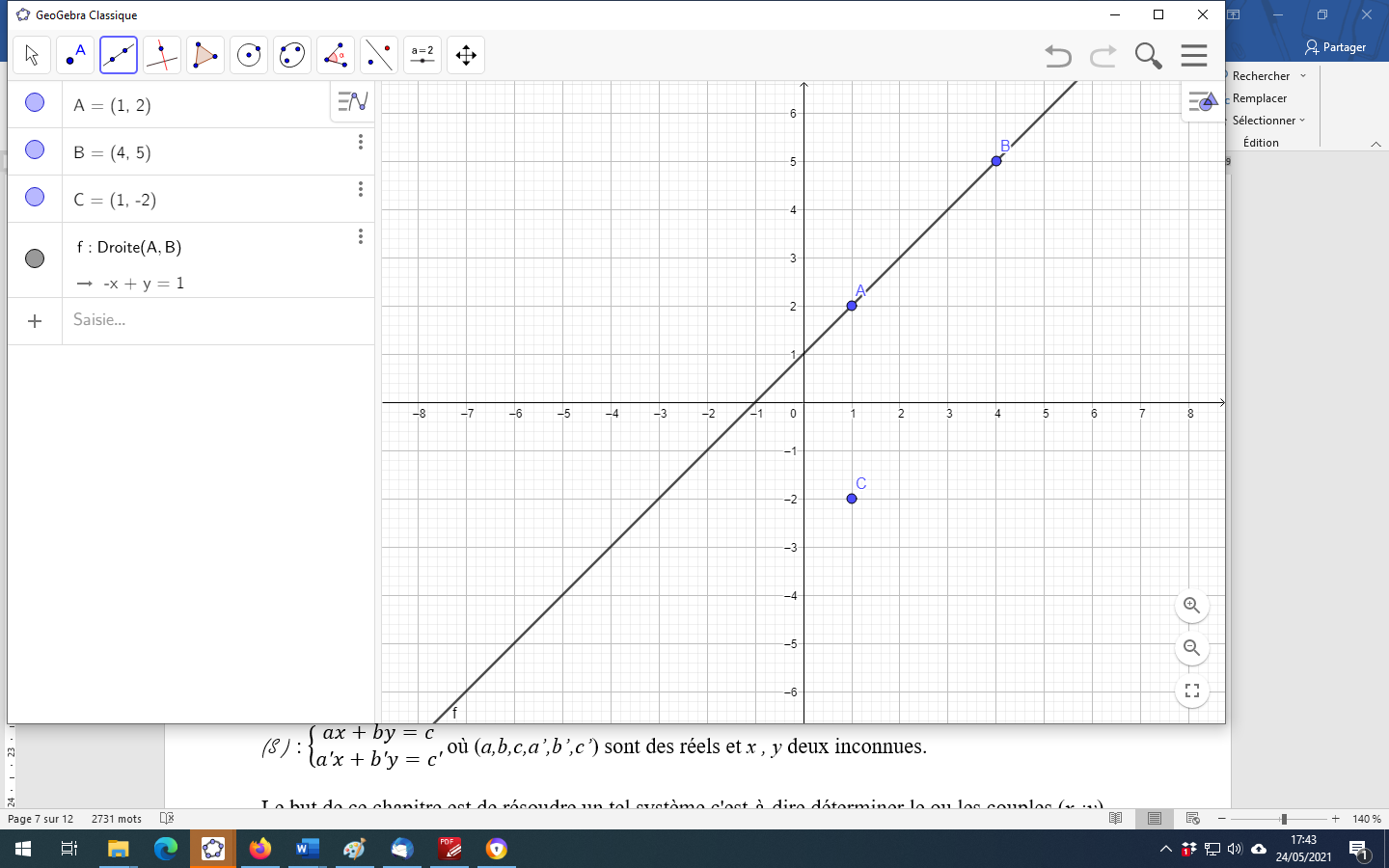
Le point A(2 ;3) appartient à D’ donc

Soit 3-6=p et p=-3 D’ :

2.Soit A(1 ;2) , B(4 ;5) et C(1 ;-2) .

a) Déterminer la pente de la droite (AB).

b) Déterminer une équation de la droite D’ parallèle à (AB) et passant par le point C.

2a) La pente de *(AB)* est *m* = = .

b) comme les droites (AB) et D’ sont parallèles alors elles ont le même coefficient directeur .

Une équation de *D’* est donc de la forme : *y = x + p*

Comme C appartient à la droite *d* alors

-2 = 1 + *p* soit soit

Une équation de *D’* est donc : *y = x -3.*

**IV- Système de deux équations à deux inconnues**

Vidéo : [mathssa.fr/systeme](http://www.mathssa.fr/systeme) (jusqu’à 3mns52s)

Dans ce cours, on s’intéressera à des **systèmes d’équations linéaires à deux inconnues** c'est-à-dire du type :

(S ) : où (*a,b,c,a’,b’,c’*) sont des réels et *x , y* deux inconnues.

Le but de ce chapitre est de résoudre un tel système c'est-à-dire déterminer le ou les couples (*x ;y*) solutions de chaque équation du système simultanément. On donnera l’ensemble des solutions notée S.

Exemple : considérons le système : (S ) :

La solution de ce système semble être le couple formé par et . On écrira S={(1 ;2)}

Dans un 1er temps, nous allons **résoudre un système graphiquement**.

Nous nous intéresserons ensuite au **nombre de couples solutions** du système (peut on prédire le nombre de solutions sans résoudre ?). Nous donnerons ensuite une **méthode algébrique** de résolution du système.

Vidéo : [mathssa.fr/systeme](http://www.mathssa.fr/systeme) (13mns13s jusqu’à la fin)

**1.Résolution graphique à l’aide des équations réduites de droite**

Résoudre un **système d’équations linéaires à deux inconnues du type** : revient finalement à chercher l’intersection des droites D et D’ d’équations cartésiennes :

et

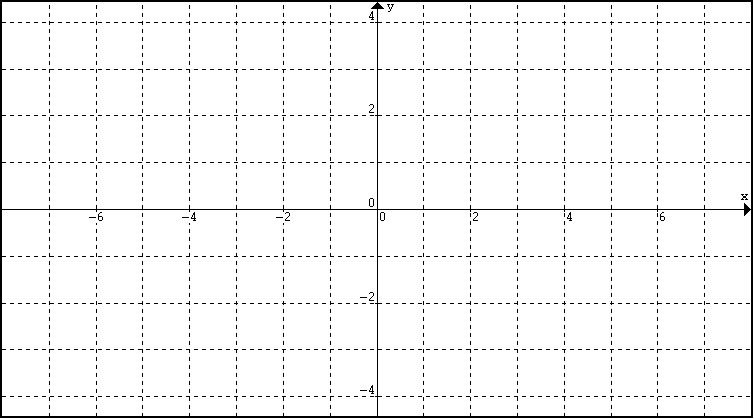
Méthode : pour résoudre graphiquement un **système d’équations linéaires à deux inconnues, nous allons transformer les équations cartésiennes en équations réduites**

Exemple :Soit le système de 2 équations linéaires à 2 inconnues :.

Résoudre graphiquement le système (S) revient à représenter les points M(*x ;y)* où (*x ;y*) est un couple solution du système (S).

On cherche l’intersection des droites d : et d’ :

La solution est le couple (-1 ;-1)



Vérification :

**2.Nombre de solutions**

On considère le système (S ) : .

On appelle (D) la droite d’équation et (D’) la droite d’équation.

Il y a trois cas possibles :

* soit (D) et (D’) sont sécantes en un point , (S ) admet alors un seul couple solution.
* soit (D) et (D’) sont strictement parallèles , (S ) admet alors aucun couple solution.
* soit (D) et (D’) sont confondues , (S ) admet alors une infinité de couples solutions.

|  |
| --- |
| **Définition :**  Soit le système (S ) : .  On appelle **déterminant** du système (S ) le réel |

|  |
| --- |
| **Propriété:**  le système(S ) : admet un **unique couple solution** si et seulement si |

**Preuve :**

Soit (D) la droite d’équation et (D’) la droite d’équation

Le vecteur est un vecteur directeur de la droite *D*

Le vecteur est un vecteur directeur de la droite *D’*.

Calculons  :

(D) et (D’) sont sécantes en un point (D) et (D’) ne sont pas parallèles

 ne sont pas colinéaires

.



Exemple : prédire à l’aide d’un calcul le nombre de solutions du système: (S ) : .

1××1

Le système admet un seul couple solution.

**Remarques importantes :**

La propriété précédente ne s’applique que pour un **système linéaire** de 2 équations à 2 inconnues.

Si le déterminant d’un système est nul alors le système admet soit **aucun couple solution** (droites strictement parallèles), soit une **infinité de couples solutions** (droites confondues).

**Exemple d’un système n’admettant aucune solution**

Soit (S) le système :

Le système admet soit aucun couple solutions soit une infinité

Résolution du système :

En isolant *y* dans la première équation, on a : *y =* 3*x +* 1

En remplaçant *y* dans la deuxième équation, on a : 6*x –* 2(3*x +* 1) *=* 6

Soit : 6*x –* 6*x –* 2 *=* 6

Soit encore : *–* 2 *=* 6. On a abouti à une contradiction.

Les deux équations du système (S) ne peuvent pas être vérifiées simultanément par un couple de nombres réels (*x*; *y*).

Le système (S) ne possède donc pas de solution.

Interprétation géométrique :

Le système (S) équivaut à , soit :

O

J

I

*y = 3x+1*

*y = 3x-3*

Soit encore :

Les droites d’équations *y =* 3*x +* 1 et *y =* 3*x –* 3 possèdent des coefficients directeurs égaux, elles sont donc strictement parallèles.

Il n’existe pas de couple de nombres réels (*x*; *y*) vérifiant simultanément les équations des deux droites.

**Exemple d’un système admettant une infinité de solutions**

Soit (*S*) le système :

Le système admet soit aucun couple solutions soit une infinité

Résolution du système :

Le système (S) équivaut à , soit :

Soit encore :

Tous les couples de coordonnées (*x*; *y*) vérifiant l’équation *y =* 2*x +* 2 sont solutions du systèmes (S).

Pour *x* = 5 par exemple, *y* = -2×5 + 2 = -8. Le couple (5 ; -8) est solution.

Il existe une infinité de couples de nombres réels (*x*; *y*) vérifiant l’équation

*y =* 2*x +* 2.

Le système (S) possède donc une infinité de solutions.

Interprétation géométrique :

Les droites associées à ces deux équations sont confondues.

**3.Résolution algébrique d’un système**

Vidéo : [mathssa.fr/systeme](http://www.mathssa.fr/systeme) (de 3mns 52s à 8mns30s)

**a)la méthode de substitution**

**Méthode générale** :

Dans une équation , on exprime une **inconnue** en fonction de l’autre puis on remplace cette inconnue dans la 2ème équation**.**

Résoudre le système (S ) :

(S )

**b.la méthode par combinaison linéaire**

Vidéo : [mathssa.fr/systeme](http://www.mathssa.fr/systeme) (de 8mns25s à 13mns10s)

**Méthode générale** :

Souvent la méthode par substitution a l’inconvénient de faire apparaitre des rationnels

Une autre méthode peut etre plus intéressante.

On peut « combiner » les deux équations afin de faire disparaitre une inconnue dans une des deux équations.

Résoudre le système suivant :

A noter : Ici, la méthode de substitution ne se prête pas à la résolution du système car en isolant une inconnue, on ramène les équations à des coefficients rationnels. Ce qui compliquerait considérablement les calculs.

On multiplie la première équation par 5 et la deuxième équation par 3 dans le but d’éliminer une inconnue par soustraction ou addition des deux équations.

On soustraie les deux premières équations. Ici, on élimine l’inconnue *x*.

On résout l’équation obtenue pour trouver l’inconnue *y*.

On substitue dans une des équations du système la valeur ainsi trouvée pour *y* et on calcule la valeur de l’autre inconnue.

On note :