

Chapitre 15 équations de droites et systèmes

I- Equation cartésienne d'une droite

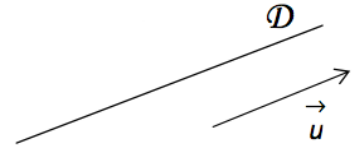
Vidéo : mathssa.fr/eqdroite (jusqu'à 6mns40s)

1. Vecteur directeur d'une droite :

Définition :

D est une droite du plan.

On appelle vecteur directeur de D tout vecteur non nul $\vec{u}$ qui possède la même direction que la droite D .



Méthode : Déterminer graphiquement un vecteur directeur d'une droite

Vidéo : mathssa.fr/vd (4mns12s)

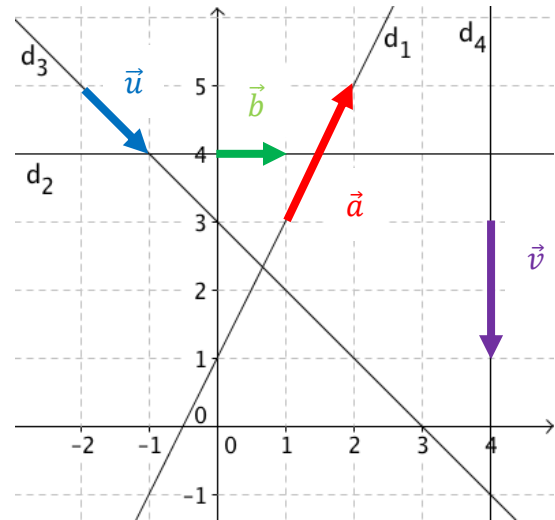
Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan.
Donner des vecteurs directeurs des droites d_1, d_2, d_3 et d_4 .

Pour d_1 : $\vec{a}(1; 2)$

Pour d_2 : $\vec{b}(1; 0)$

Pour d_3 : $\vec{u}(1; -1)$

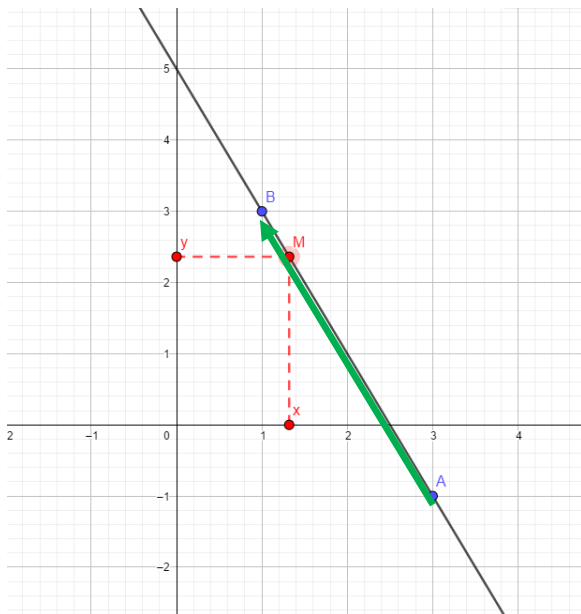
Pour d_4 : $\vec{v}(0; 2)$



2. Equation cartésienne d'une droite

Exercice corrigé : Vers les équations algébriques de droite...

Dans un repère du plan, on se donne $A(3; -1)$ et $B(1; 3)$. Soit M un point quelconque de la droite (AB) .
On pose $M(x; y)$. Cherchons une relation entre x et y .



Un vecteur directeur de la droite (AB) est $\overrightarrow{AB}(1 - 3; 3 - (-1))$ soit $\overrightarrow{AB}(-2; 4)$.

$\overrightarrow{AM}(x - 3; y + 1)$

Calculons $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB})$

$$\begin{aligned} \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) &= \begin{vmatrix} x-3 & y+1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= (x-3)4 - (-2)(y+1) \\ &= 4x - 12 + 2y + 2 \\ &= 4x + 2y - 10 \end{aligned}$$

Il est évident que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires et donc que $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0$

On en déduit que $4x + 2y - 10 = 0$

On dira qu'une équation cartésienne de la droite (AB) de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}(-2; 4)$ est $4x + 2y - 10 = 0$

Plus généralement, une droite a une équation cartésienne du type $ax + by + c = 0$

Un vecteur directeur aura pour coordonnées $(-b; a)$

Théorème et définition :

Toute droite D admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a; b) \neq (0; 0)$.

Un vecteur directeur de D est $\vec{u}(-b; a)$.

Cette équation est appelée **équation cartésienne** de la droite D .

Démonstration au programme :

Vidéo : mathssa.fr/equacart

Soit $A(x_0; y_0)$ un point de la droite D et $\vec{u}(\alpha; \beta)$ un vecteur directeur de D .

Un point $M(x; y)$ appartient à la droite D si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}(x - x_0; y - y_0)$ et $\vec{u}(\alpha; \beta)$ sont colinéaires, soit $\det(\overrightarrow{AM}; \vec{u}) = 0$ soit encore $\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0$.

$$\text{Donc : } \beta(x - x_0) - \alpha(y - y_0) = 0$$

$$\beta x - \beta x_0 - \alpha y + \alpha y_0 = 0$$

$$\beta x - \alpha y + \alpha y_0 - \beta x_0 = 0$$

Cette équation peut s'écrire : $ax + by + c = 0$ avec $a = \beta$ et $b = -\alpha$ et $c = \alpha y_0 - \beta x_0$.

Les coordonnées de $\vec{u}$ sont donc $(\alpha; \beta) = (-b; a)$.

Exemple :

Soit une droite d d'équation cartésienne $4x - 5y - 1 = 0$.

$$a = 4 \quad b = -5$$

Alors le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(-b; a)$ soit $(5; 4)$ est un vecteur directeur de d .

Théorème réciproque :

L'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $ax + by + c = 0$ avec $(a; b) \neq (0; 0)$ est une droite D de vecteur directeur $\vec{u}(-b; a)$.

- Admis -

Vidéos : mathssa.fr/equacart2 (3mns18s) mathssa.fr/equacart3 (5mns)

Méthode : Déterminer une équation cartésienne de droite à partir d'un point et d'un vecteur directeur

On considère un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par le point $A(3; 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(5; 3)$.

1. Ainsi, comme $\vec{u}(\underbrace{5}_{-b}; \underbrace{3}_a)$ est un vecteur directeur de d , une équation de d est de la forme :

$$3x - 5y + c = 0$$

Pour déterminer c , il suffit de substituer les coordonnées de A dans l'équation.

$$3 \times 3 - 5 \times 1 + c = 0$$

$$c = -9 + 5 = -4$$

$$d: 3x - 5y - 4 = 0$$

2. Déterminer une équation cartésienne de la droite d' passant par les points $B(5 ; 3)$ et $C(1 ; -3)$.

B et C appartiennent à d' donc $\overrightarrow{BC}$ est un vecteur directeur de d' .

On a : $\overrightarrow{BC}(1 - 5; -3 - 3)$ soit $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} \underbrace{-4}_{-b}; \underbrace{-6}_a \end{pmatrix}$

Une équation cartésienne de d' est de la forme : $-6x + 4y + c = 0$.

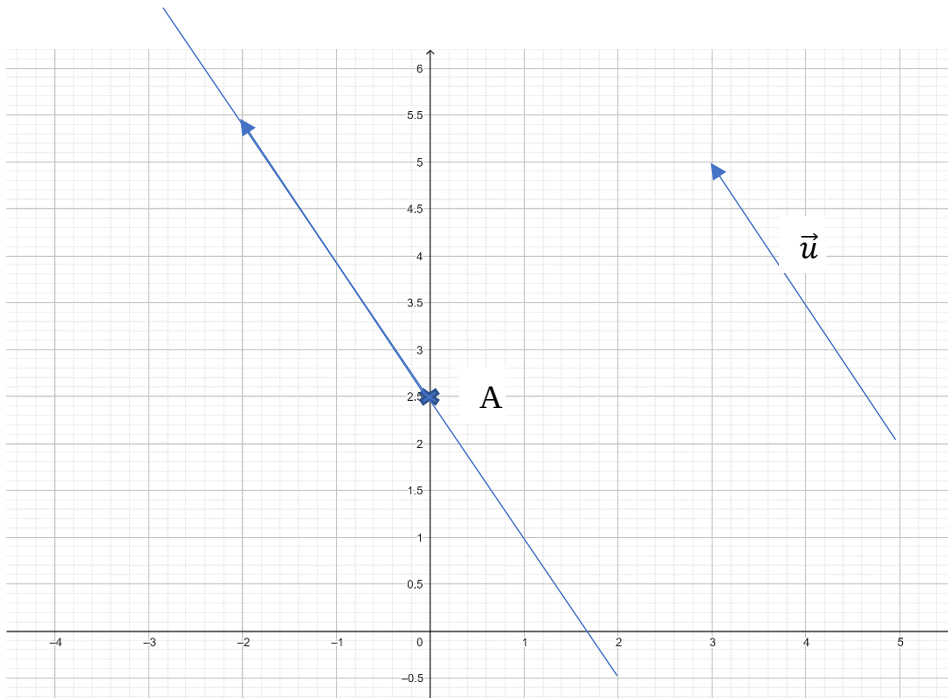
$B(5 ; 3)$ appartient à d' donc : $-6 \times 5 + 4 \times 3 + c = 0$ soit $c = 30 - 12 = 18$

Une équation cartésienne de d' est : $-6x + 4y + 18 = 0$ ou encore $3x - 2y - 9 = 0$.

Méthode : Tracer une droite dont on connaît une équation cartésienne

Vidéo : mathssa.fr/equacart4 (3mns44s)

Tracer la droite (d) d'équation cartésienne : $3x + 2y - 5 = 0$.



$$a = 3 \quad b = 2$$

Alors le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(-b ; a)$ soit $(-2 ; 3)$ est un vecteur directeur de d .

On remplace x par 0.

$$3 \times 0 + 2y - 5 = 0$$

$$2y = 5$$

$$y = 2,5$$

$A(0 ; 2,5)$ appartient à la droite (d)

(d) est la droite passant par A et vecteur directeur $\vec{u}(-2 ; 3)$

II- Equation réduite et pente d'une droite

Vidéo : mathssa.fr/equdroite (de 6mns 40s jusqu'à 13mns 30s)

1.De l'équation cartésienne à l'équation réduite

• Si $b \neq 0$, alors l'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ de la droite D peut être ramenée à une équation réduite $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$. Et on note $m = -\frac{a}{b}$ et $p = -\frac{c}{b}$.

On obtient donc $y = mx + p$

Vocabulaire : - m est appelé la **pente** ou le **coefficient directeur** de la droite D .

- p est appelé l'**ordonnée à l'origine** de la droite D .

Remarque : Dans l'équation réduite, on retrouve l'expression d'une fonction affine.

- Si $b = 0$, alors l'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ de la droite D peut être ramenée à l'équation réduite $x = -\frac{c}{a}$. Et on note $n = -\frac{c}{a}$. On obtient donc $x=n$.

Exemple 1: Soit d dont une droite d'équation cartésienne $4x - y - 6 = 0$. ($a = 4$, $b = -1$)

Son équation réduite est $y = 4x - 6$. Un vecteur directeur de d est $\vec{u}(1; 4)$.

Remarque : si l'équation réduite d'une droite est $y = mx + p$ alors un vecteur directeur de cette droite est $\vec{u}(1; m)$. De plus cette droite n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées.

Exemple 2: Soit d dont une droite d'équation cartésienne $-3x + 5 = 0$. ($a = -3$, $b = 0$)

Son équation réduite est $x = \frac{5}{3}$. Un vecteur directeur de d est $\vec{u}(0; -3)$

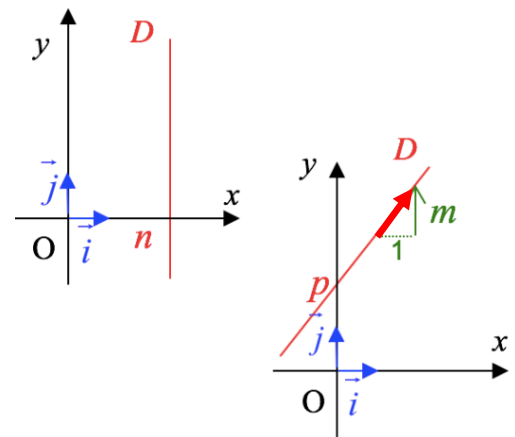
Remarque : si l'équation réduite d'une droite est $x = n$ alors cette droite est parallèle à l'axe des ordonnées.

Propriété :

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan. Soit D une droite du plan.

- Si D est parallèle à l'axe des ordonnées :
alors l'équation de D est de la forme $x = n$,
où n est un nombre réel.

- Si D n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées :
alors l'équation de D est de la forme $y = mx + p$,
où m et p sont deux nombres réels.
Un vecteur directeur de la droite D est alors $\vec{u}(1; m)$



Remarques :

Dans le cas où D n'est pas « verticale », D est la représentation graphique de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$ m est le coefficient directeur et p est l'ordonnée à l'origine
On rappelle que la droite passe par le point de coordonnées $(0; p)$
et que partant d'un point de la droite, si on avance de $+1$ « horizontalement » puis de m « verticalement », on retombe sur un point de la droite.
Un vecteur directeur de la droite D est alors $\vec{u}(1; m)$

Exercice : Donner le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de chacune des droites d'équations :
a) $y = -2x + 3$ b) $y = 5 = 0x + 5$ c) $4x + 2y = 1$

a) Coefficient directeur : -2
Ordonnée à l'origine : 3

b) Coefficient directeur : 0
Ordonnée à l'origine : 5

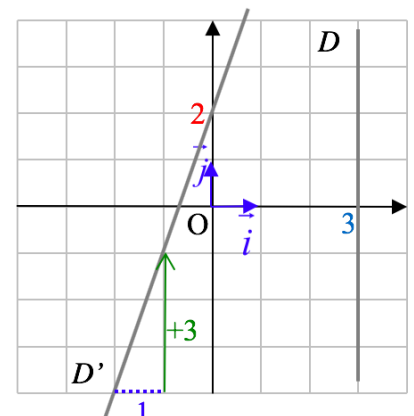
b) L'équation peut s'écrire : $4x + 2y = 1$ soit $2y = -4x + 1$ soit $y = -2x + 0,5$
Coefficient directeur : -2
Ordonnée à l'origine : $0,5$

Exemples :

La droite D a pour équation $x=3$

La droite D' a pour équation $y=mx+p=3x+2$

Son ordonnée à l'origine est $p=2$ et son coefficient directeur est $m=3$



Propriété réciproque :

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan et m, p, n trois nombres réels, m étant non nul.

L'ensemble des points M du plan dont les coordonnées $(x; y)$ sont tels que :

$y = mx + p$ ou $x = n$, est une droite.

Exercice : Représenter graphiquement une droite d'équation réduite donnée

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan. Dans un repère, tracer les droites d_1, d_2 et d_3 d'équations réduites respectives : $y = 2x - 3$, $y = 2$, $x = 3$.

Soit la droite d_1 d'équation $y = 2x - 3$.

d_1 est une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.

Le coefficient directeur est $m=2$

L'ordonnée à l'origine est $p=-3$

Ainsi la droite d_1 passe par le point de coordonnées $(0; -3)$

Partant de ce point si on avance de +1 « horizontalement » et de +2 « verticalement », on retombe sur un deuxième point de la droite.

Soit la droite d_2 d'équation $y = 2$.

d_2 est une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.

Le coefficient directeur est $m=0$

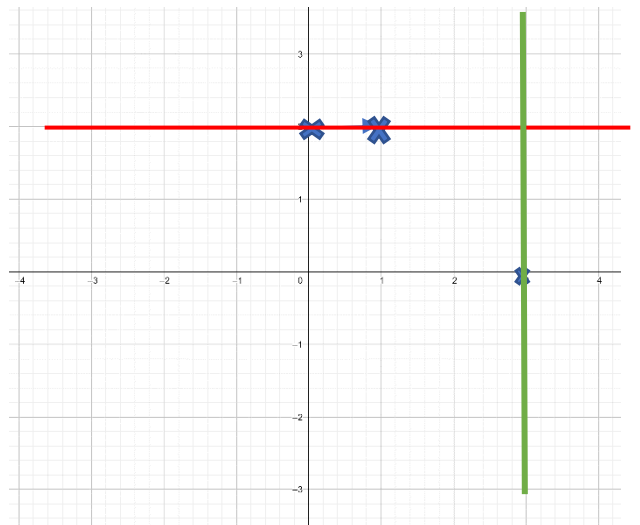
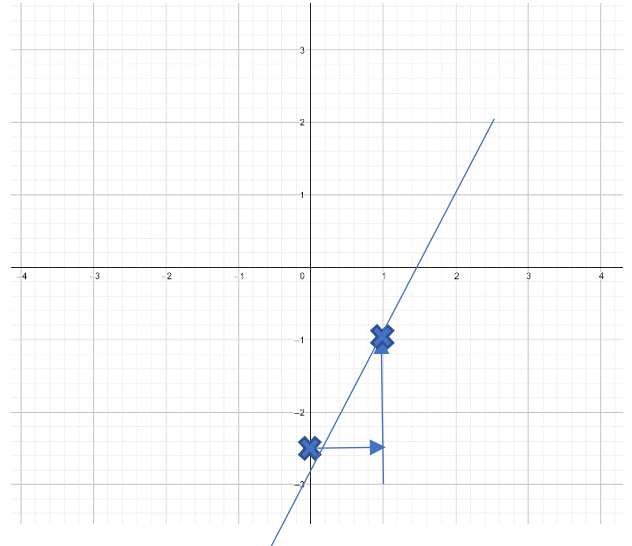
L'ordonnée à l'origine est $p=2$

Ainsi la droite d_2 passe par le point de coordonnées $(0; 2)$

Partant de ce point si on avance de +1 « horizontalement » puis de 0 « verticalement », on retombe sur un deuxième point de la droite.

Soit la droite d_3 d'équation $x = 3$.

d_3 est la droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par $(3; 0)$

**2. Pente d'une droite**

Vidéo : mathssa.fr/equdroite (de 13mns 30s jusqu'à 16mns00)

Propriété :

Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ sont deux points distincts d'une droite D tel que $x_A \neq x_B$ alors la droite D a pour pente (ou coefficient directeur) $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Preuve : admis

Méthode : Déterminer une équation réduite de droite dont on connaît deux points

Vidéo : mathssa.fr/pente (4mns30s)

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan.

Soit $A(4; -1)$ et $B(3; 5)$ deux points d'une droite d .

Déterminer une équation de la droite d .

Les points A et B sont d'abscisses différentes donc la droite d n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées. Elle est donc de la forme $y = mx + p$, où m et p sont deux nombres réels.

Le coefficient directeur de d est $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5 - (-1)}{3 - 4} = \frac{6}{-1} = -6$.

L'équation de d est donc de la forme : $y = -6x + p$

Comme $A(4; -1)$ appartient à la droite d , ses coordonnées vérifient l'équation de d soit :

$-1 = -6 \times 4 + p$ soit $-1 + 24 = p$ soit $p = 23$

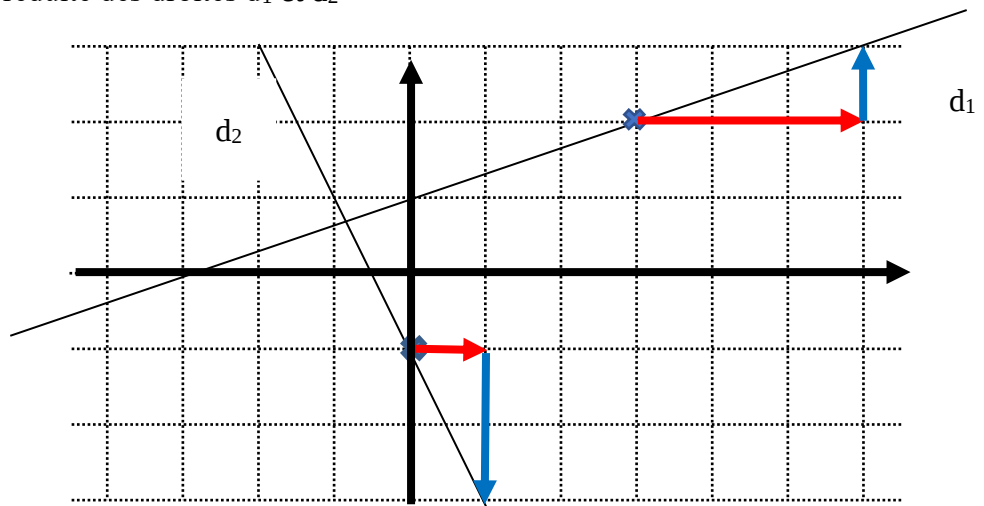
Une équation de d est donc : $y = -6x + 23$.

Remarque : pour lire la pente d'une droite, on pourra remarquer que la pente est aussi égale à la formule $m = \frac{\text{accroissement des ordonnées}}{\text{accroissement des abscisses}}$.

Exercice : lire l'équation réduite des droites d_1 et d_2

$$d_1: y = \frac{1}{3}x + 1$$

$$d_2: y = -2x - 1$$

**ALGORITHME**

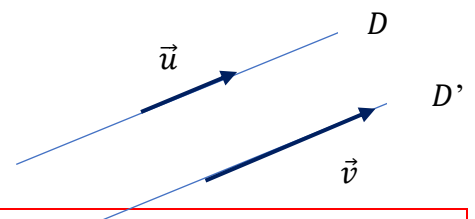
```
def droite(xA,yA,xB,yB):
    m=(yB-yA)/(xB-xA)
    p=yA-m*xA
    print("y=",m,"*x+",p)
```

```
Jul 5 2016, 14:56:50 [MSC v.1600 32 bit (Intel)]
win32. ***
*** Remote le moteur Python est actif ***
>>> Console de processus distant Réinitialisée ***
>>> droite(4,-1,3,5)
y= -6.0 *x+ 23.0
```

mathssa.fr/droite.py

III- Position relative de deux droites

Vidéo : mathssa.fr/equdroite (de 16mns jusqu'à la fin)

1.Droites parallèles et vecteurs directeurs**Propriété :**

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan.

Dire que D et D' sont parallèles entre-elles équivaut à dire qu'elles ont des vecteurs directeurs colinéaires.

Méthode : Démontrer que deux droites sont parallèles

Démontrer que les droites d_1 et d_2 d'équations respectives $6x - 10y - 5 = 0$ ($a = 6, b = -10$) et $-9x + 15y = 0$ ($a = -9, b = 15$) sont parallèles.

Le vecteur $\vec{u}(10; 6)$ est un vecteur directeur de la droite d_1 .

Le vecteur $\vec{v}(-15; -9)$ est un vecteur directeur de la droite d_2 .

Calculons $\det(\vec{u}; \vec{v})$:

$$\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} 10 & 6 \\ -15 & -9 \end{vmatrix} = 10 \times (-9) - 6 \times (-15) = -90 + 90 = 0$$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et donc les droites d_1 et d_2 sont parallèles.

Cas particulier : si on dispose de l'équation réduite de deux droites D et D'...

On suppose que D a pour équation réduite $y = mx + p$ de vecteur directeur $\vec{u}(1; m)$

et que D' a pour équation réduite $y = m'x + p'$ de vecteur directeur $\vec{v}(1; m')$

D et D' sont parallèles équivaut à $\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} 1 & m \\ 1 & m' \end{vmatrix} = 0$

$$\text{équivaut à } 1 \times m' - m \times 1 = 0 \quad (m' - m = 0)$$

$$\text{équivaut à } m' = m$$

2. Droites parallèles et équation réduite**Propriété :**

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan.

Soit D et D' deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées.

Dire que D et D' sont parallèles entre-elles équivaut à dire qu'elles ont le même coefficient directeur.

Tableau récapitulatif :

Equation de D	$x = n$	$y = mx + p$	$y = mx + p$	
Equation de D'	$x = n'$	$x = n$	$y = m'x + p'$	
Position de D et D'	$D \parallel D'$	D et D' sont sécantes	Si $m = m'$	Si $m \neq m'$
			$D \parallel D'$	D et D' sont sécantes
Représentation				

Vidéo : mathssa.fr/positiondroites

Exemples :

Dans un repère du plan, d_1 , d_2 et d_3 admettent pour équations respectives :

$$y = 3x + 4, y = 3x + 9, x = 8$$

Les droites d_1 et d_2 sont parallèles car elles ont un coefficient directeur égal à 3.

Les droites d_1 et d_3 sont sécantes.

Exercice :

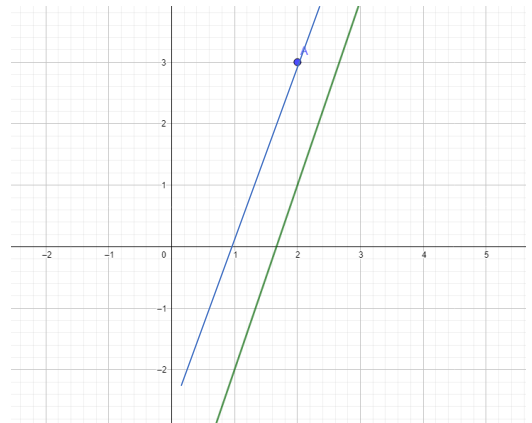
1. Soit D la droite d'équation réduite : $y = 3x - 5$.
Déterminer une équation de la droite D' parallèle à D et passant par le point A(2 ;3).

1. Un coefficient directeur de la droite D est $m=3$
comme les droites D et D' sont parallèles alors elles ont le même coefficient directeur 3.

La droite D' a pour équation réduite $y = 3x + p$.

Le point A(2 ;3) appartient à D' donc $3 = 3 \times 2 + p$

soit $3 = 6 + p$ Soit $3-6=p$ et $p=-3$ D' : $y = 3x - 6$



2. Soit A(1 ;2) , B(4 ;5) et C(1 ; -2) .

a) Déterminer la pente de la droite (AB).

b) Déterminer une équation de la droite D' parallèle à (AB) et passant par le point C.

2a) La pente de (AB) est $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5-2}{4-1} = \frac{3}{3} = 1$.

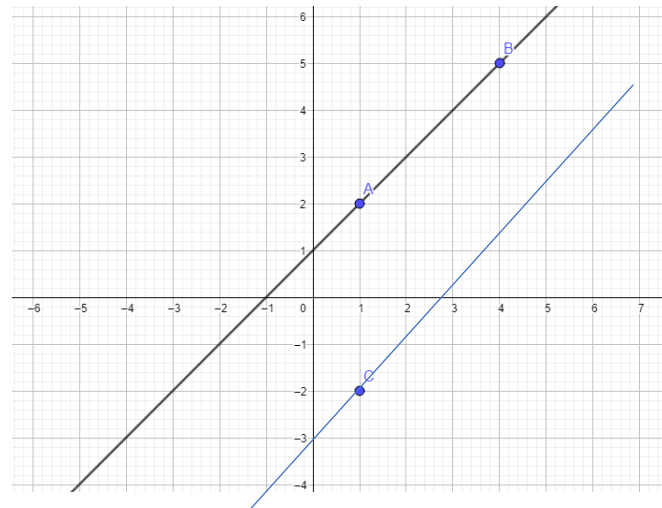
b) comme les droites (AB) et D' sont parallèles alors elles ont le même coefficient directeur 1.

Une équation de D' est donc de la forme : $y = x + p$

Comme C(1 ; -2) appartient à la droite d alors

$-2 = 1 + p$ soit $-2 - 1 = p$ soit $p = -3$

Une équation de D' est donc : $y = x - 3$.

**IV- Système de deux équations à deux inconnues**

Vidéo : mathssa.fr/systeme (jusqu'à 3mns52s)

Dans ce cours, on s'intéressera à des **systèmes d'équations linéaires à deux inconnues** c'est-à-dire du type :

$(\mathcal{S}) : \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ où (a, b, c, a', b', c') sont des réels et x, y deux inconnues.

Le but de ce chapitre est de résoudre un tel système c'est-à-dire déterminer le ou les couples (x, y) solutions de chaque équation du système simultanément. On donnera l'ensemble des solutions notée S.

Exemple : considérons le système : $(\mathcal{S}) : \begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ x - 5y = -9 \end{cases}$

La solution de ce système semble être le couple formé par $x = 1$ et $y = 2$. On écrira $S = \{(1 ; 2)\}$

Dans un 1^{er} temps, nous allons **résoudre un système graphiquement**.

Nous nous intéresserons ensuite au **nombre de couples solutions** du système (peut-on prédire le nombre de solutions sans résoudre ?). Nous donnerons ensuite une **méthode algébrique** de résolution du système.

Vidéo : mathssa.fr/systeme (13mns13s jusqu'à la fin)

1. Résolution graphique à l'aide des équations réduites de droite

Résoudre un **système d'équations linéaires à deux inconnues du type** : $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ revient finalement à chercher l'intersection des droites D et D' d'équations cartésiennes : **$ax + by = c$** et **$a'x + b'y = c'$**

Méthode : pour résoudre graphiquement un **système d'équations linéaires à deux inconnues, nous allons transformer les équations cartésiennes en équations réduites**

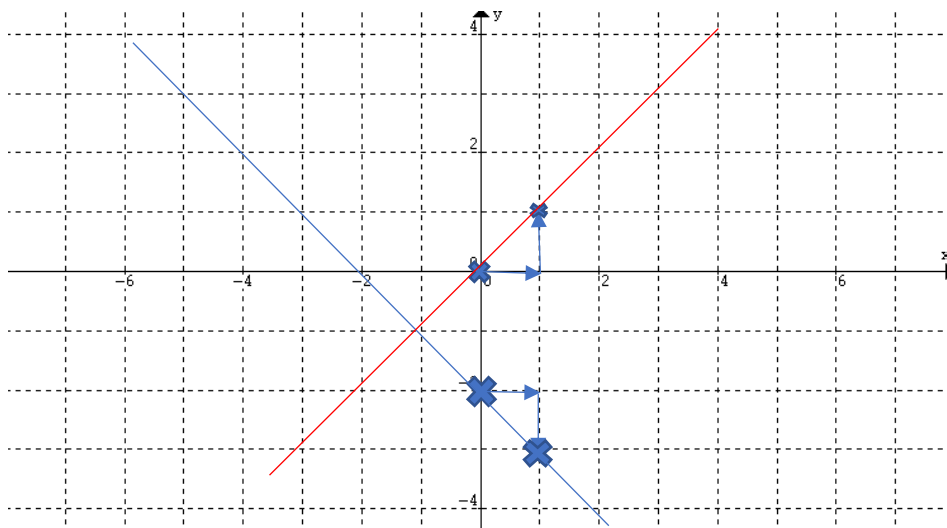
Exemple : Soit le système de 2 équations linéaires à 2 inconnues : $\begin{cases} x + y = -2 \\ -x + y = 0 \end{cases}$

Résoudre graphiquement le système (S) revient à représenter les points M(x ; y) où (x ; y) est un couple solution du système (S).

$$\begin{cases} x + y = -2 \\ -x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x - 2 \\ y = x \end{cases}$$

On cherche l'intersection des droites d : $y = -x - 2$ et d' : $y = x$

La solution est le couple (-1 ; -1)



Vérification : $-1 - 1 = -2$ $-(-1) + (-1) = +1 - 1 = 0$

2. Nombre de solutions

On considère le système $(\mathcal{S}) : \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

On appelle (D) la droite d'équation $ax + by = c$ et (D') la droite d'équation $a'x + b'y = c'$.

Il y a trois cas possibles :

- soit (D) et (D') sont sécantes en un point, $(\mathcal{S})$ admet alors un seul couple solution.
- soit (D) et (D') sont strictement parallèles, $(\mathcal{S})$ admet alors aucun couple solution.
- soit (D) et (D') sont confondues, $(\mathcal{S})$ admet alors une infinité de couples solutions.

Définition :

Soit le système $(\mathcal{S}) : \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$.

On appelle **déterminant** du système $(\mathcal{S})$ le réel $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$

Propriété:

le système $(\mathcal{S}) : \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$, admet un **unique couple solution** si et seulement si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$

Preuve :

Soit (D) la droite d'équation $ax + by = c$ et (D') la droite d'équation $a'x + b'y = c'$

Le vecteur $\vec{u}(-b; a)$ est un vecteur directeur de la droite D

Le vecteur $\vec{v}(-b'; a')$ est un vecteur directeur de la droite D'.

Calculons $\det(\vec{u}; \vec{v})$:

$$\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} -b & a \\ -b' & a' \end{vmatrix} = (-b) \times a' - a \times (-b') = -ba' + ab' = ab' - a'b$$

(D) et (D') sont sécantes en un point $\Leftrightarrow$ (D) et (D') ne sont pas parallèles

$\Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires

$\Leftrightarrow \det(\vec{u}; \vec{v}) \neq 0$.

$\Leftrightarrow ab' - a'b \neq 0$

Exemple : prédire à l'aide d'un calcul le nombre de solutions du système: $(\mathcal{S}) : \begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 0 \end{cases}$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1) - 1 \times 1 = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

Le système admet un seul couple solution.

Remarques importantes :

La propriété précédente ne s'applique que pour un **système linéaire** de 2 équations à 2 inconnues. Si le déterminant d'un système est nul alors le système admet soit **aucun couple solution** (droites strictement parallèles), soit une **infinité de couples solutions** (droites confondues).

Exemple d'un système n'admettant aucune solution

Soit (S) le système : $\begin{cases} -3x + y = 1 \\ 6x - 2y = 6 \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = (-3) \times (-2) - 1 \times 6 = +6 - 6 = 0$$

Le système admet soit aucun couple solutions soit une infinité

Résolution du système :

En isolant y dans la première équation, on a : $y = 3x + 1$

En remplaçant y dans la deuxième équation, on a : $6x - 2(3x + 1) = 6$

Soit : $6x - 6x - 2 = 6$

Soit encore : $-2 = 6$. On a abouti à une contradiction.

Les deux équations du système (S) ne peuvent pas être vérifiées simultanément par un couple de nombres réels $(x ; y)$.

Le système (S) ne possède donc pas de solution.

Interprétation géométrique :

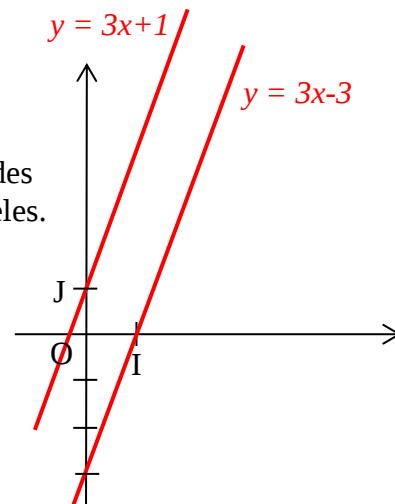
Le système (S) équivaut à $\begin{cases} y = 3x + 1 \\ -2y = -6x + 6 \end{cases}$, soit :

$$\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = \frac{-6}{-2}x + \frac{6}{-2} \end{cases}$$

Soit encore : $\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = 3x - 3 \end{cases}$

Les droites d'équations $y = 3x + 1$ et $y = 3x - 3$ possèdent des coefficients directeurs égaux, elles sont donc strictement parallèles.

Il n'existe pas de couple de nombres réels $(x ; y)$ vérifiant simultanément les équations des deux droites.

**Exemple d'un système admettant une infinité de solutions**

Soit (S) le système : $\begin{cases} -6x - 3y = -6 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} -6 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-6) \times 1 - (-3) \times 2 = -6 + 6 = 0$$

Le système admet soit aucun couple solutions soit une infinité

Résolution du système :

Le système (S) équivaut à $\begin{cases} -3y = 6x - 6 \\ y = -2x + 2 \end{cases}$, soit :

$$\begin{cases} y = \frac{6}{-3}x - \frac{6}{-3} \\ y = -2x + 2 \end{cases}$$

$$\text{Soit encore : } \begin{cases} y = -2x + 2 \\ y = -2x + 2 \end{cases}$$

Tous les couples de coordonnées $(x ; y)$ vérifiant l'équation $y = 2x + 2$ sont solutions du système (S).

Pour $x = 5$ par exemple, $y = -2 \times 5 + 2 = -8$. Le couple $(5 ; -8)$ est solution.

Il existe une infinité de couples de nombres réels $(x ; y)$ vérifiant l'équation

$$y = 2x + 2.$$

Le système (S) possède donc une infinité de solutions.

Interprétation géométrique :

Les droites associées à ces deux équations sont confondues.

3. Résolution algébrique d'un système

Vidéo : mathssa.fr/systeme (de 3mns 52s à 8mns30s)

a) la méthode de substitution**Méthode générale :**

Dans une équation, on exprime une **inconnue** en fonction de l'autre puis on remplace cette inconnue dans la 2^{ème} équation.

Résoudre le système $(\mathcal{S}) : \begin{cases} x + 3y = 15 \\ 2x + y = 10 \end{cases}$

$$(\mathcal{S}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y + 15 \\ 2(-3y + 15) + y = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y + 15 \\ -6y + 30 + y = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y + 15 \\ -5y = 10 - 30 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y + 15 \\ -5y = -20 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y + 15 \\ y = \frac{-20}{-5} = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \times 4 + 15 = -12 + 15 = 3 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$S = \{(3 ; 4)\}$$

b.la méthode par combinaison linéaireVidéo : mathssa.fr/systeme (de 8mns25s à 13mns10s)**Méthode générale :**

Souvent la méthode par substitution a l'inconvénient de faire apparaître des rationnels

Une autre méthode peut être plus intéressante.

On peut « combiner » les deux équations afin de faire disparaître une inconnue dans une des deux équations.

Résoudre le système suivant :
$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 5x + 3y = 2 \end{cases}$$

A noter : Ici, la méthode de substitution ne se prête pas à la résolution du système car en isolant une inconnue, on ramène les équations à des coefficients rationnels. Ce qui compliquerait considérablement les calculs.

On multiplie la première équation par 5 et la deuxième équation par 3 dans le but d'éliminer une inconnue par soustraction ou addition des deux équations.

$$\begin{array}{l} \times 5 \begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 5x + 3y = 2 \end{cases} \end{array}$$

On soustraie les deux premières équations. Ici, on élimine l'inconnue x .

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 15x - 10y = 25 \\ - \begin{cases} 15x + 9y = 6 \end{cases} \end{cases} \\ \hline 15x - 15x - 10y - 9y = 25 - 6 \end{array}$$

On résout l'équation obtenue pour trouver l'inconnue y .

$$\begin{array}{l} -19y = 19 \\ y = -1 \end{array}$$

On substitue dans une des équations du système la valeur ainsi trouvée pour y et on calcule la valeur de l'autre inconnue.

$$\begin{array}{l} 3x - 2 \times (-1) = 5 \\ 3x + 2 = 5 \\ 3x = 5 - 2 \\ 3x = 3 \\ x = 1 \end{array}$$

On note : $S = \{(1 ; -1)\}$