CHAPITRE 1 – racine carrée et valeur absolue

I- Racines carrées

Lien vidéo :mathssa.fr/racinecar (jusqu'à 12mns33s)

Activité préparatoire au chapitre 1

1.Définition-exemple

Définition :
Soit $\boldsymbol{a}$ **un nombre positif.** On appelle racine carrée de a , notée $\sqrt{a}$, le nombre réel positif dont le carré est a.

Exemples : $3^2 = 9$ donc $\sqrt{9} = 3$
$2{,}6^2 = 6{,}76$ donc $\sqrt{6{,}76} = 2{,}6$

La racine carrée de –5 est le nombre dont le carré est –5 !
Un nombre au carré est toujours positif (règle des signes), donc la racine carrée d'un nombre négatif est impossible.$\sqrt{-5}$ n'existe pas !

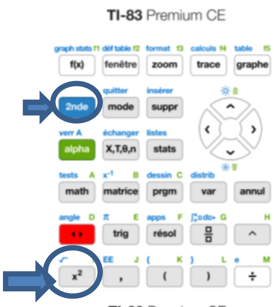
Remarques :

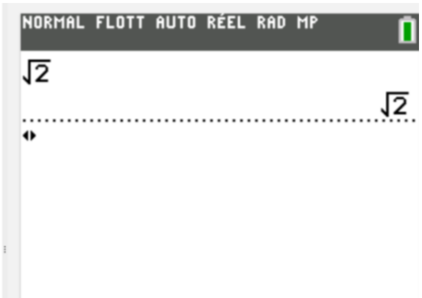
- $\sqrt{a} \geq 0$
- **On ne peut pas calculer la racine carrée d'un nombre strictement négatif.**

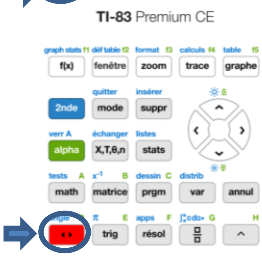
Autrement dit, si $a < 0$, $\sqrt{a}$ n'existe pas.

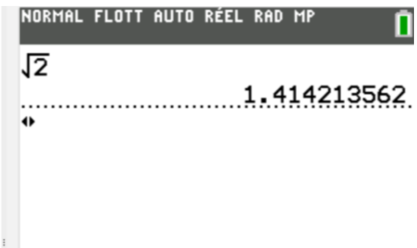
Quelques exemples : $\sqrt{0} = 0$ $\sqrt{1} = 1$ $\sqrt{2} \approx 1{,}414$ $\sqrt{3} \approx 1{,}732$
$\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ seront appelé nombres **irrationnels**

Passage de la valeur exacte à une valeur approchée à l'aide de la touche  de la calculatrice (ne pas recopier !!!)









Racines de carrés parfaits

$\sqrt{4} = 2$ $\sqrt{36} = 6$ $\sqrt{100} = 10$

$\sqrt{9} = 3$ $\sqrt{49} = 7$ $\sqrt{121} = 11$

$\sqrt{16} = 4$ $\sqrt{64} = 8$ $\sqrt{144} = 12$

$\sqrt{25} = 5$ $\sqrt{81} = 9$ $\sqrt{169} = 13$

2.Propriétés sur les racines carrées

a) lien avec les carrés

Propriété 1 :
Pour tout nombre positif a, on a $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$

Exemple : $\left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$

Propriété 2 :
Pour tout nombre réel positif a, on a $\sqrt{a^2} = a$
Pour tout nombre réel négatif a, on a $\sqrt{a^2} = -a$

Exemples : $\sqrt{(-5)^2} = 5 \quad car -5 \leq 0$ $\quad \sqrt{\pi^2} = \pi \quad car \quad \pi \geq 0$

b)Opérations sur les racines carrées

Lien vidéo :mathssa.fr/racinecar **(à partir de 12mns33s jusqu'à la fin)**

Propriétés :

Pour tous réels a et b positifs, $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ $\quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

Remarque : $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7 \quad \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$
Il est donc clair que $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$. De même , $\sqrt{a} - \sqrt{b} \neq \sqrt{a-b}$

Exemples :
$\sqrt{32} \times \sqrt{2} = \sqrt{32 \times 2} = \sqrt{64} = 8$.

$\frac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{98}{2}} = \sqrt{49} = 7$

Démonstration au programme : Pour le produit :

Lien vidéo : mathssa.fr/racineproduit (3mns40s)

- $\left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 \times \left(\sqrt{b}\right)^2 = a \times b$
- $\left(\sqrt{a \times b}\right)^2 = a \times b$ car a et b sont positifs

Donc $\left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a \times b}\right)^2$ et donc $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$

Propriété :
Pour tous réels a et b **strictement positifs**, on a : $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$

Démonstration au programme : ne pas recopier mais regarder la vidéo

Lien vidéo : mathssa.fr/racinesomme (5mns35s)

On va démontrer que $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$ lorsque $a>0$ et $b>0$
En effet, on a par exemple :

- $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2=\left(\sqrt{a}\right)^2+2\sqrt{a}\sqrt{b}+\left(\sqrt{b}\right)^2=a+b+2\sqrt{ab}$
- $\left(\sqrt{a+b}\right)^2=a+b$

Donc $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2>\left(\sqrt{a+b}\right)^2$ car $2\sqrt{ab}>0$
Et donc $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$

Exercice : Écrire le plus simplement possible :
Lien vidéo : mathssa.fr/simpliracines (8mns38s)

A = $\sqrt{32}\times\sqrt{2}$ B = $\sqrt{3}\times\sqrt{36}\times\sqrt{3}$ C = $\left(4\sqrt{5}\right)^2$
D = $\frac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}}$ E = $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{72}}$ F = $\frac{\sqrt{32}\times\sqrt{10}}{\sqrt{80}}$

$A=\sqrt{32}\times\sqrt{2}=\sqrt{32\times 2}=\sqrt{64}=8$

$B=\sqrt{3}\times\sqrt{36}\times\sqrt{3}=\sqrt{3\times 3}\times\sqrt{36}=\sqrt{9}\times\sqrt{36}=3\times 6=18$
$C=\left(4\sqrt{5}\right)^2=4^2\times\left(\sqrt{5}\right)^2=16\times 5=80$
$D=\frac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{98}{2}}=\sqrt{49}=7$
$E=\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{72}}=\sqrt{\frac{50}{72}}=\sqrt{\frac{25}{36}}=\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}}=\frac{5}{6}$
$F=\frac{\sqrt{32}\times\sqrt{10}}{\sqrt{80}}=\sqrt{\frac{320}{80}}=\sqrt{4}=2$

3.Extraire un carré parfait

Exercice : Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$, avec a et b entiers et b étant le plus petit possible :
A = $\sqrt{72}$ B = $\sqrt{45}$ C = $3\sqrt{125}$

Lien vidéo : mathssa.fr/extrairecarre (7mns25s)

$A = \sqrt{72}$

$= \sqrt{9 \times 8}$ ← *On fait « apparaître » dans 72 un carré parfait : 9*

$= \sqrt{9} \times \sqrt{8}$ ← *On extrait cette racine en appliquant une formule*

$= 3\times \sqrt{8}$ ← *On simplifie la racine du carré parfait*

$= 3\times \sqrt{4 \times 2}$ ← *On recommence si possible*

$= 3\times \sqrt{4} \times \sqrt{2}$

$= 3 \times 2 \times \sqrt{2}$

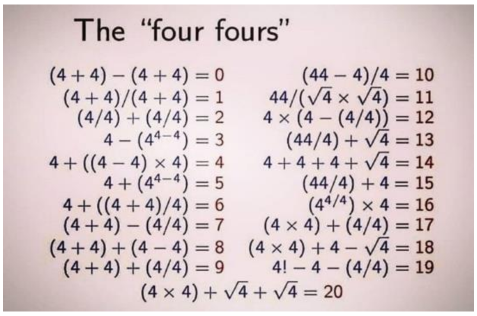
$= 6\sqrt{2}$ ← *On s'arrête, 2 ne « contient » pas de carré parfait*

$B = \sqrt{45}$
$= \sqrt{9 \times 5}$
$= \sqrt{9} \times \sqrt{5}$
$= 3\sqrt{5}$

$C = 3\sqrt{125}$
$= 3\sqrt{25 \times 5}$
$= 3\sqrt{25} \times \sqrt{5}$
$= 3 \times 5\sqrt{5}$
$= 15\sqrt{5}$

Remarque : Pour que b soit le plus petit possible, b ne doit pas contenir de carré parfait.

Curiosité :ne pas recopier


The "four fours"

$(4+4)-(4+4)=0$
$(4+4)/(4+4)=1$
$(4/4)+(4/4)=2$
$4-(4^{4-4})=3$
$4+((4-4)\times 4)=4$
$4+(4^{4-4})=5$
$4+((4+4)/4)=6$
$(4+4)-(4/4)=7$
$(4+4)+(4-4)=8$
$(4+4)+(4/4)=9$
$(44-4)/4=10$
$44/(\sqrt{4}\times\sqrt{4})=11$
$4\times(4-(4/4))=12$
$(44/4)+\sqrt{4}=13$
$4+4+4+\sqrt{4}=14$
$(44/4)+4=15$
$(4^{4/4})\times 4=16$
$(4\times 4)+(4/4)=17$
$(4\times 4)+4-\sqrt{4}=18$
$4!-4-(4/4)=19$
$(4\times 4)+\sqrt{4}+\sqrt{4}=20$

4.Simplifier les écritures contenant des racines carrées

1) Écrire le plus simplement possible :

$A = 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 6\sqrt{3}$ $B = 7\sqrt{2} - 3\sqrt{5} + 8\sqrt{2} - \sqrt{5}$ $C = (3 - 2\sqrt{3}) - (4 - 6\sqrt{3})$

Lien vidéo : mathssa.fr/simpliracines2 (5mns02s)

1) On regroupe les membres d'une même « famille de racines carrées » pour réduire l'expression.
Les différentes familles de racines carrées sont : $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{10}, \sqrt{13}, \ldots$

A = $4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 6\sqrt{3}$
= $(4 - 2 + 6)\sqrt{3}$
= $8\sqrt{3}$

B = $7\sqrt{2} - 3\sqrt{5} + 8\sqrt{2} - \sqrt{5}$
= $15\sqrt{2} - 4\sqrt{5}$

C = $\left(3 - 2\sqrt{3}\right) - \left(4 - 6\sqrt{3}\right)$
= $3 - 2\sqrt{3} - 4 + 6\sqrt{3}$
= $-1 + 4\sqrt{3}$

2) Écrire les expressions suivantes sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont des entiers et b le plus petit possible : D = $\sqrt{12} + 7\sqrt{3} - \sqrt{27}$ E = $\sqrt{125} - 2\sqrt{20} + 6\sqrt{80}$

Lien vidéo : mathssa.fr/simpliracines3 (10mns34s)

On fait apparaître des racines carrées d'une même famille. Pour cela, il faut extraire des carrés parfaits.

D = $\sqrt{12} + 7\sqrt{3} - \sqrt{27}$ ← *$\sqrt{12}$ et $\sqrt{27}$ sont des « $\sqrt{3}$ déguisées »*
= $\sqrt{4 \times 3} + 7\sqrt{3} - \sqrt{9 \times 3}$ ← *Elles sont maintenant « démasquées » !*
= $\sqrt{4} \times \sqrt{3} + 7\sqrt{3} - \sqrt{9} \times \sqrt{3}$ ← *On peut alors réduire l'expression*
= $2\sqrt{3} + 7\sqrt{3} - 3\sqrt{3}$
= $6\sqrt{3}$

E = $\sqrt{125} - 2\sqrt{20} + 6\sqrt{80}$
= $\sqrt{25 \times 5} - 2\sqrt{4 \times 5} + 6\sqrt{16 \times 5}$
= $\sqrt{25} \times \sqrt{5} - 2\sqrt{4} \times \sqrt{5} + 6 \times \sqrt{16} \times \sqrt{5}$
= $5\sqrt{5} - 2 \times 2\sqrt{5} + 6 \times 4\sqrt{5} = 25\sqrt{5}$

5.Simplifier une expression du type $\frac{a}{\sqrt{b}}$

Méthode : il suffit de multiplier le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{b}$

Exemple : simplifier l'expression : $\frac{3}{2\sqrt{5}}$

$\frac{3}{2\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{5}\sqrt{5}}$ (on multiplie par $\sqrt{5}$ au numérateur et au dénominateur)

$= \frac{3\sqrt{5}}{2(\sqrt{5})^2}$

$= \frac{3\sqrt{5}}{2\times 5}$

$= \frac{3\sqrt{5}}{10}$

II-Valeur absolue et distance :

1.Définition de la valeur absolue d'un nombre :

Vidéo : mathssa.fr/valabs2 (0-12mns20s)

Définition :

La **valeur absolue** d'un nombre est égale à :

- ce nombre s'il est positif
- son opposé s'il est négatif.

Plus précisément la valeur absolue d'un réel x noté $|x|$ est défini par :

$|x| = x$ si $x \geq 0$

$|x| = -x$ si $x \leq 0$

Exemples : $|3{,}5| = 3{,}5$ car $3{,}5 \geq 0$ $|-3{,}5| = 3{,}5$ car $-3{,}5 \leq 0$

$|1-\pi| = -(1-\pi) = -1+\pi$ car $1-\pi \leq 0$

Remarques :

- Une valeur absolue est un nombre réel positif.
- $|x|$=0 est équivalent à $x = 0$
- $\sqrt{x^2} = |x|$
- $|-x| = |x|$
- $|xy| = |x||y|$. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ pour $y \neq 0$

2.Notion de distance entre deux réels :

Vidéo : mathssa.fr/valabs2 (à partir de 12mns20s jusqu'à 15mns30s)

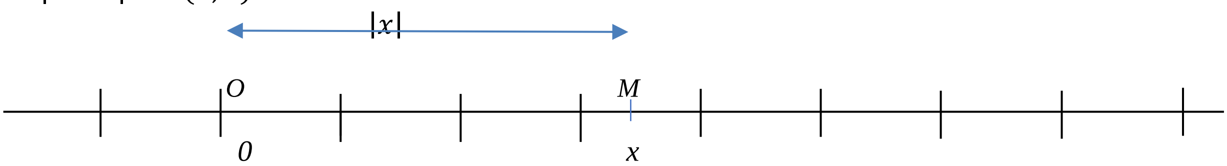
Définition :

Soit A et B deux points d'abscisses respectives a et b sur une droite graduée.

La distance entre les points A et B notée $d(a\,;b)$ est le nombre $|a-b|$.

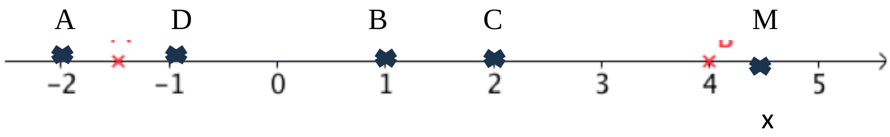
Remarques :

- $d(a\,;b) = |a-b| = |b-a| = d(b;a)$
- $|x| = |x-0| = d(x;0) = MO$



Exemple :d(–1,5 ; 4) = $|-1{,}5-4| = |-5{,}5| = 5{,}5$

Exercice : Soit les points A,B, C , D et M représentant les nombres -2 , 1 ,2 ,-1 et x. Placer ces points ci-dessous



Compléter les égalités :

MC=$d(x;2) = |x-2|$

$MA = d(x;-2) = |x-(-2)| = |x+2|$

MD=$d(x;-1) = |x+1|$