***Chapitre 2 : les grands ensembles de nombres***

# Notations ensemblistes

1. **Elément appartenant à un ensemble**

|  |
| --- |
| **Notation :**  *a* et *b* sont deux éléments et A un ensemble  «  » signifie que *a* appartient à A  «  » signifie que *b* n’appartient pas à A  A |

Exemple : 

1 A

5 A

1. **Ensemble inclus dans un autre**

|  |
| --- |
| **Notation -définition**:  Soit A et B deux ensembles  On dit que **A est inclus dans B** que l’on note «  » **lorsque** tout élément de A appartient à B  On dit que **A n’est pas inclus dans B** que l’on note «  **» si et seulement si** il existe un élément de A qui  n’appartient pas à B. |

**Illustration :**

|  |  |
| --- | --- |
| B  A | B  A |

# Les entiers naturels et les entiers relatifs

1. **Les entiers naturels :**
2. **Définition**

|  |
| --- |
| **Définition**:  L’ensemble des **nombres entiers naturels** se nomme ℕ (vient de l’italien « Naturale ») et est formé par les nombres ℕ= |

Exemples :

ℕ , ℕ

1. **Famille des pairs et des impairs – points raisonnement**

**Propriété :**

Tout entier naturel s’écrit donc sous la forme (famille des entiers pairs) ou (famille des entiers impairs) désignant un entier naturel.

La réunion de ces deux familles forme l’ensemble ℕ

**Raisonnement par disjonction de cas :**

**On démontre qu’une propriété est vraie pour un nombre fini de cas (famille d’entiers) , ces cas regroupant tous les cas possibles….**

**Exercice :** à l’aide d’une disjonction de cas , démontrer que le produit de deux entiers consécutifs est un nombre pair. Autrement dit , pour tout entier naturel quelconque est un nombre pair.

Vidéo : [mathssa.fr/produitentiers](http://www.mathssa.fr/produitentiers)  (7mns)

**1er cas :**on suppose  **est** **pair** et donc que s’écrit sous la forme où est un entier naturel.

est donc pair (multiple de 2)

**2ème cas :**on suppose  **est** im**pair** et donc que s’écrit sous la forme où est un entier naturel.

est donc pair (multiple de 2)

**Conclusion :** par disjonction de cas, on a démontré que, pour tout entier naturel , est un nombre pair.

**Raisonnement par l’absurde :**

**On garde les hypothèses mais suppose que la conclusion à laquelle on doit arriver est fausse et on essaie d’obtenir une contradiction**

|  |
| --- |
| **Propriété :**  Si est un nombre pair alors est pair. |

Preuve :on raisonne par l’absurde.

On suppose donc que est pair et que est impair.

s’écrit sous la forme

est donc un nombre impair. Contradiction avec l’hypothèse de départ.

On en déduit donc que a est pair.

**2.Les entiers relatifs :**

|  |
| --- |
| **Définition**:  L’ensemble des **nombres relatifs** se note ℤ (vient de l’allemand « Zahl ») et est composé des  **entiers naturels et de leurs opposés.** ℤ= |

Exemples : ℤ ℤ ℤ

|  |
| --- |
| **Propriété:**  Tout **entier naturel** est aussi un  **entier relatif**  Autrement dit :  ℕ ℤ |

**III- Les nombres décimaux et les rationnels :**

**1.Caractérisation des nombres décimaux :**

|  |
| --- |
| **Définition** :  L’ensemble des **nombres décimaux** se note ⅅ (vient du français « Décimales ») et représente l’ensemble des nombres qui s’écrivent avec un nombre fini de chiffres après la virgule. |

Exemples : ⅅ ⅅ

ⅅ car ⅅ car

|  |
| --- |
| **Définition équivalente :**  Un nombre décimal peut toujours s’écrire sous la forme de la fraction d’un entier et d’une puissance de 10. |

Par exemple  = =

|  |
| --- |
| **Propriétés :**  Tout **entier relatif** est aussi un  **nombre décimal**  Autrement dit :  ℤ ⅅ |

**Illustration :**

|  |
| --- |
| **Propriété :**  n’est pas un nombre décimal |

**Démonstration (au programme) vidéo :** [**mathssa.fr/13nondécimal**](http://www.mathssa.fr/13nondecimal)

Raisonnons par l’absurde. Supposons donc que est un nombre décimal

= avec entier relatif et entier naturel.

Ainsi

Ainsi est divisible par 3. Donc la somme de ces chiffres : est divisible par 3. Ce qui est impossible !

**2.Caractérisation des nombres rationnels**

|  |
| --- |
| **Définition** :  L’ensemble des **nombres rationnels** se note ℚ (vient de l’italien « Quotiente ») et représente  l’ensemble des nombres qui s’écrivent sous la forme d’un quotient où est un entier relatif et un entier relatif non nul |

Exemples : - ℚ ℚℚ

|  |
| --- |
| **Propriété** :  Tout **nombre décimal** est aussi un  **nombre rationnel**  Autrement dit :  ⅅ ℚ |

**Illustration :** =

On a vu que n’est pas un nombre décimal mais c’est un nombre rationnel.

=0,3333… La partie décimale de comporte donc une infinité de 3.

|  |
| --- |
| **Propriété** :  Tout **nombre rationnel non décimal** a une partie **décimale périodique.** |

Preuve : admis

**Enigme :**  VRAI !

Posons .

D’où et

**3. est il un nombre rationnel ?**

|  |
| --- |
| **Propriété** :  n’est pas **un nombre rationnel .** |

**Démonstration : au programme**

Rappel :Si est un nombre pair alors est pair.

**vidéo :** [**mathssa.fr/racine2**](http://www.mathssa.fr/racine2)

On raisonne par l’absurde. On suppose donc que avec et entiers relatifs premiers entre eux (q non nul) c’est-à-dire . irréductible

soit

On en déduit donc

Ainsi est pair.

On en déduit donc que est pair

Ainsi il existe un entier tel que

Comme alors

soit encore .

Il vient donc .

est donc pair . Ainsi b est pair

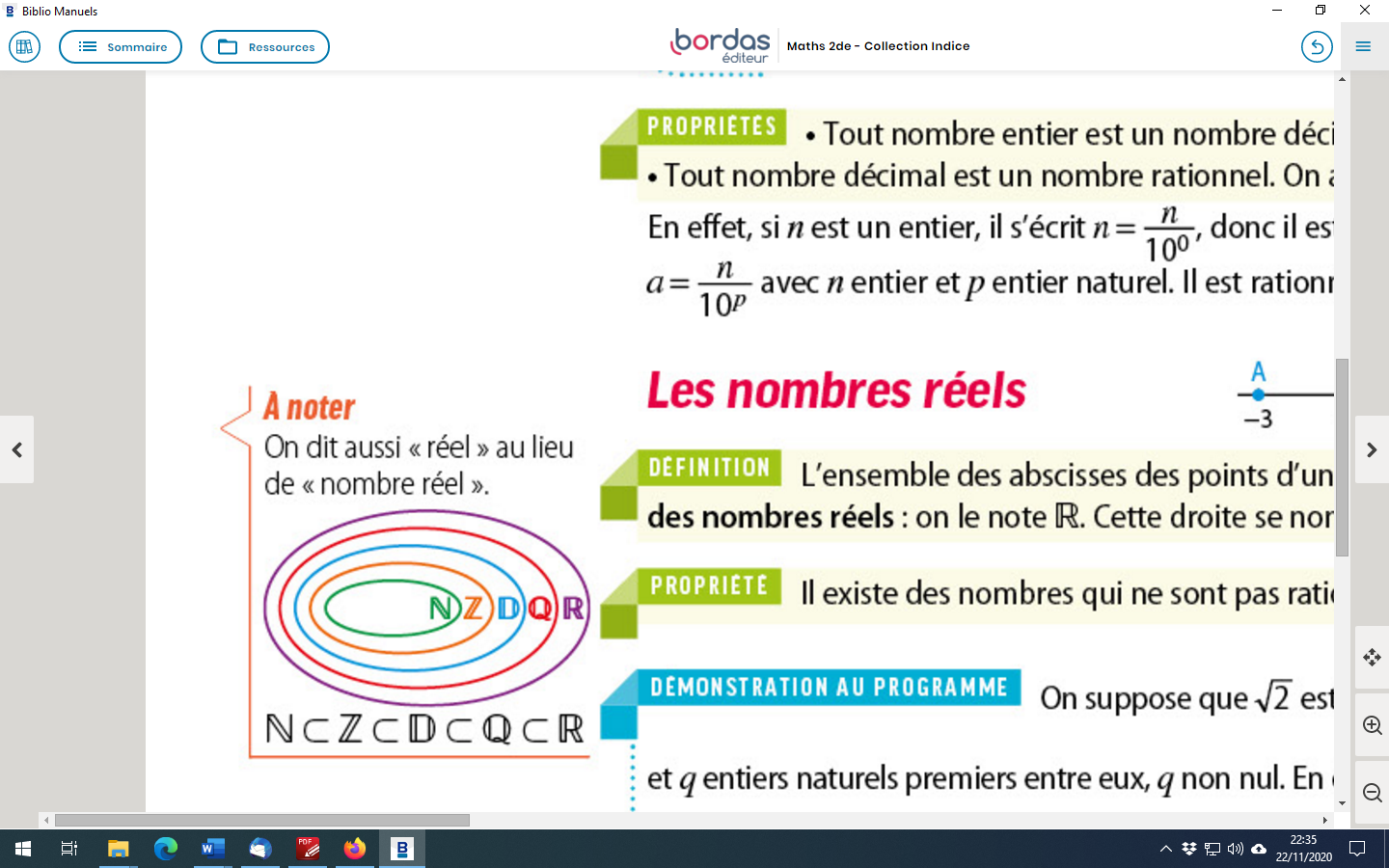
étant pairs . n’est pas irréductible CONTRADICTION !

**Remarque :** il existe des nombres qui n’appartiennent à aucun des ensembles cités précédemment (…)Il faut donc construire un ensemble encore plus grand et qui contiennent tous les autres.

**IV- Les nombres réels :**

|  |
| --- |
| **Définition** :  L’ensemble des nombres **réels** se note ℝ (vient de l’allemand « Real ») et représente l’ensemble de tous les nombres. |

|  |
| --- |
| **Propriété :**  Tout **nombre rationnel** est un aussi un nombre réel.  Ainsi ℚℝ |



**Remarque :** « millefeuille ensembliste »

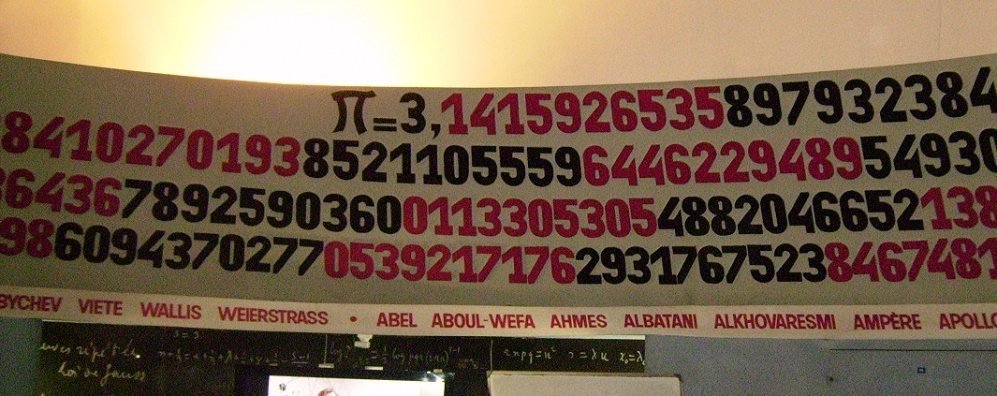
**Remarque importante :**

ℝ est formé par les **rationnels** mais aussi par des nombres qui ne sont pas **rationnels** comme : .

Ces nombres sont des **irrationnels**.

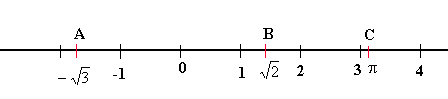
(palais de la découverte , salle consacrée aux maths)

La partie décimale des **irrationnels** est infinie et non périodique.



|  |
| --- |
| **Théorème :**  On assimile **l’ensemble des réels** à l’ensemble des abscisses des points d’une droite graduée que l’on appelle **droite des réels.** |

Exemple : représentation sur la droite des réels des réels suivants  – ;  ; 



Placer dans le schéma les réels suivants :

-2

-

-

ℝ

ℚ

D

ℤ

ℕ

Remarque : On retrouve les inclusions suivantes :

**Bilan : Vidéo :** [**mathssa.fr/nombres**](http://www.mathssa.fr/nombres)

# V- Les intervalles de :

**Vidéo :** [**mathssa.fr/interv**](http://www.mathssa.fr/interv1) **de 0 à 4mns40s**

1. **Notations**

L’ensemble de tous les nombres réels tels que peut se représenter sur une droite graduée.

**2 4**

0 1

Cet ensemble est appelé un **intervalle** et se note :

2 4 5

**Vidéo :** [**mathssa.fr/interv**](http://www.mathssa.fr/interv1) **de 4mns40s à 12mns30s**

1. **Intervalle ouvert et intervalle fermé**

Définitions :

On dit qu'un intervalle est **fermé** si ses extrémités appartiennent à l'intervalle.

On dit qu’il est **ouvert** dans le cas contraire.

Exemples :

* L’intervalle est un intervalle fermé.

On a : et

* L’intervalle est un intervalle ouvert.

On a : et

* L’intervalle est également un intervalle ouvert.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Nombres réels | Notation | Représentation |
|  |  | 0 1 |
|  |  | 0 1 |
|  |  | 0 1 |
|  |  | 0 1 |
|  | désigne l’infini | 0 1 |
|  |  | 0 1 |
|  |  | 0 1 |
|  |  | 0 1 |

**Remarques :**

* la représentation graphique d’un intervalle est soit un segment, soit une demi-droite. C’est donc une partie de représentée en un seul morceau.
* Par convention, + (plus l’infini) ou -(moins l’infini) ne sont pas des nombres, ce sont des symboles. Du coté +ou -, le crochet est toujours ouvert. On n’a pas le droit d’utiliser **+**ou -dans des inégalités !!!.
* On peut écrire comme étant
* 
* Attention à l’ordre des bornes, l’intervalle [1 ;-3] n’a aucun sens.

**Application :**Compléter le tableau à l’aide de la vidéo : [mathssa.fr/interv2](http://www.mathssa.fr/interv2)

