

Chapitre 2 : les grands ensembles de nombres

I- Notations ensemblistes

1. Élément appartenant à un ensemble

Notation :

a et b sont deux éléments et A un ensemble

« $a \in A$ » signifie que a appartient à A

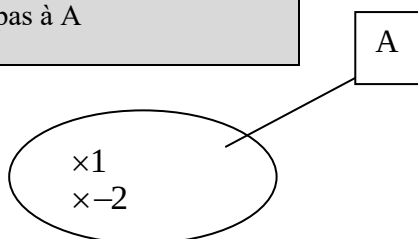
« $b \notin A$ » signifie que b n'appartient pas à A

Exemple :

$1 \in A$

$5 \notin A$

$\times 5$



2. Ensemble inclus dans un autre

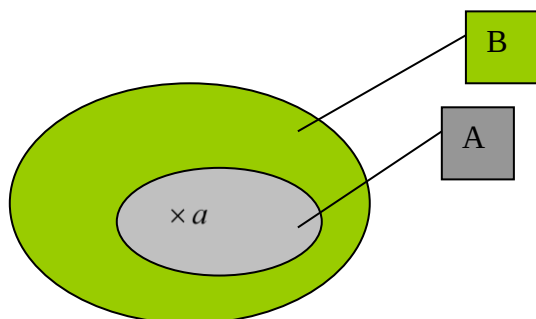
Notation - définition:

Soit A et B deux ensembles

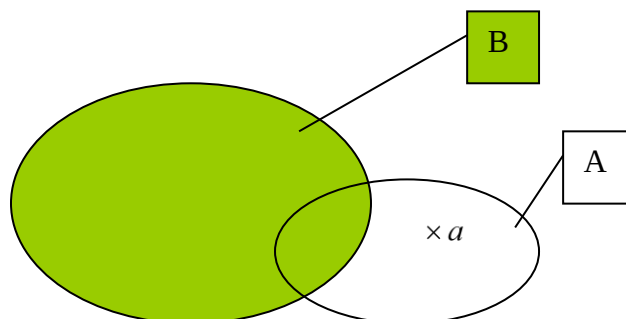
On dit que **A est inclus dans B** que l'on note « $A \subset B$ » **lorsque** tout élément de A appartient à B

On dit que **A n'est pas inclus dans B** que l'on note « $A \not\subset B$ » **si et seulement si** il existe un élément de A qui n'appartient pas à B .

Illustration :



$A \subset B$



$A \not\subset B$

II- Les entiers naturels et les entiers relatifs

1. Les entiers naturels :

a) Définition

Définition:

L'ensemble des **nombre entiers naturels** se nomme $\mathbb{N}$ (vient de l'italien « Naturelle ») et est formé par les nombres 0,1,2,3 $\mathbb{N} = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \dots\}$

Exemples :

$4 \in \mathbb{N}$, $-2 \notin \mathbb{N}$

b) Famille des pairs et des impairs – points raisonnement

Propriété :

Tout entier naturel n s'écrit donc sous la forme $n = 2k$ (famille des entiers pairs) ou $n = 2k + 1$ (famille des entiers impairs), k désignant un entier naturel.

La réunion de ces deux familles forme l'ensemble $\mathbb{N}$

Raisonnement par disjonction de cas :

On démontre qu'une propriété est vraie pour un nombre fini de cas (famille d'entiers), ces cas regroupant tous les cas possibles....

Exercice : à l'aide d'une disjonction de cas, démontrer que le produit de deux entiers consécutifs est un nombre pair. Autrement dit, pour tout entier naturel quelconque n , prouvons que $n(n + 1)$ est un nombre pair.

Vidéo : mathssa.fr/produitentiers (7mns)

1^{er} cas : on suppose **n est pair** et donc que n s'écrit sous la forme $n = 2k$ où k est un entier naturel.

$$\begin{aligned} n(n + 1) &= 2k(2k + 1) \\ &= 2 \times k(2k + 1) \end{aligned}$$

$n(n + 1)$ est donc pair (multiple de 2)

2^{ème} cas : on suppose **n est impair** et donc que n s'écrit sous la forme $n = 2k + 1$ où k est un entier naturel.

$$\begin{aligned} n(n + 1) &= (2k + 1)(2k + 1 + 1) \\ &= (2k + 1)(2k + 2) \\ &= (2k + 1)(2(k + 1)) \\ &= 2 \times (2k + 1)(k + 1) \end{aligned}$$

$n(n + 1)$ est donc pair (multiple de 2)

Conclusion : par disjonction de cas, on a démontré que, pour tout entier naturel n , $n(n + 1)$ est un nombre pair.

Raisonnement par l'absurde :

On garde les hypothèses mais suppose que la conclusion à laquelle on doit arriver est fausse et on essaie d'obtenir une contradiction

Propriété :

Si a^2 est un nombre pair alors a est pair.

Preuve : on raisonne par l'absurde.

On suppose donc que a^2 est pair et que a est **impair**.

a s'écrit sous la forme $a = 2k + 1$

$$a^2 = (2k + 1)^2 = (2k)^2 + 2 \times 2k \times 1 + 1^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

a^2 est donc un nombre impair. Contradiction avec l'hypothèse de départ.

On en déduit donc que a est pair.

2. Les entiers relatifs :**Définition :**

L'ensemble des **nombre relatifs** se note $\mathbb{Z}$ (vient de l'allemand « Zahl ») et est composé des **entiers naturels et de leurs opposés**. $\mathbb{Z} = \{ \dots - 3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \dots \}$

Exemples : $-2 \in \mathbb{Z}$ $5 \in \mathbb{Z}$ $0,33 \notin \mathbb{Z}$

Propriété :

Tout **entier naturel** est aussi un **entier relatif**

Autrement dit : $\mathbb{N} \dots \mathbb{Z}$

III- Les nombres décimaux et les rationnels :**1. Caractérisation des nombres décimaux :****Définition :**

L'ensemble des **nombre décimaux** se note $\mathbb{D}$ (vient du français « Décimales ») et représente l'ensemble des nombres qui s'écrivent avec un nombre fini de chiffres après la virgule.

Exemples : $0,56 \in \mathbb{D}$ $3 \in \mathbb{D}$
 $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$ car $\frac{1}{3} \approx 0,3333 \dots$ $\frac{3}{4} \in \mathbb{D}$ car $\frac{3}{4} = 0,75$

Définition équivalente :

Un nombre décimal peut toujours s'écrire sous la forme de la fraction d'un entier et d'une puissance de 10.

Par exemple : $2,36 = \frac{236}{100} = \frac{236}{10^2}$

Propriétés :

Tout **entier relatif** est aussi un **nombre décimal**

Autrement dit : $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$

Illustration : $-123 = 123,0$

Propriété :

$\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal

Démonstration (au programme) vidéo : mathssa.fr/13nondécimal

Raisonnons par l'absurde. Supposons donc que $\frac{1}{3}$ est un nombre décimal

$$\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n} \text{ avec } a \text{ entier relatif et } n \text{ entier naturel.}$$

Ainsi $10^n = 3 \times a$

Ainsi 10^n est divisible par 3. Donc la somme de ces chiffres : $1 + \underbrace{0 + \dots + 0}_{n \text{ fois}} = 1$ est divisible par 3.

Ce qui est impossible !

2. Caractérisation des nombres rationnels**Définition :**

L'ensemble des **nombres rationnels** se note $\mathbb{Q}$ (vient de l'italien « Quotiente ») et représente l'ensemble des nombres qui s'écrivent sous la forme d'un quotient $\frac{a}{b}$ où a est un entier relatif et b un entier relatif non nul

Exemples : $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ $\frac{1}{4} \in \mathbb{Q}$ $\frac{\pi}{2} \notin \mathbb{Q}$

Propriété :

Tout **nombre décimal** est aussi un **nombre rationnel**

Autrement dit : $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$

Illustration : $12,54 = \frac{1254}{100}$

On a vu que $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal mais c'est un nombre rationnel.

$\frac{1}{3} = 0,3333\dots$ La partie décimale de $\frac{1}{3}$ comporte donc une infinité de 3.

Propriété :

Tout **nombre rationnel non décimal** a une partie **décimale périodique**.

Preuve : admis

Enigme : $0,999\dots = 1$? VRAI !

Posons $x = 0,999\dots$ $10x = 9,999\dots = 9 + 0,999\dots = 9 + x$

$$10x = 9 + x$$

$$\text{D'où } 10x - x = 9 \text{ soit } 9x = 9 \text{ et } x = \frac{9}{9} = 1$$

3. $\sqrt{2}$ est-il un nombre rationnel ?

Propriété :

$\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Démonstration : au programme

Rappel : Si a^2 est un nombre pair alors a est pair.

vidéo : mathssa.fr/racine2

On raisonne par l'absurde. On suppose donc que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ avec a et b entiers relatifs premiers entre eux (b non nul) c'est-à-dire $\frac{a}{b}$ irréductible

$$(\sqrt{2})^2 = \frac{a^2}{b^2} \text{ soit } 2 = \frac{a^2}{b^2}$$

On en déduit donc $a^2 = 2b^2$.

Ainsi a^2 est pair.

On en déduit donc que a est pair

Ainsi il existe un entier k tel que $a = 2k$

Comme $a^2 = 2b^2$ alors

$$(2k)^2 = 2b^2$$

$$\text{soit encore } 4k^2 = 2b^2.$$

$$\text{Il vient donc } 2k^2 = b^2.$$

b^2 est donc pair. Ainsi b est pair

a et b étant pairs, $\frac{a}{b}$ n'est pas irréductible CONTRADICTION !

Remarque : il existe des nombres qui n'appartiennent à aucun des ensembles cités précédemment ($\pi, \sqrt{2} \dots$) Il faut donc construire un ensemble encore plus grand et qui contiennent tous les autres.

IV- Les nombres réels :

Définition :

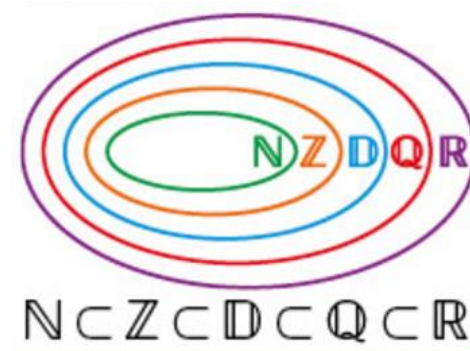
L'ensemble des nombres **réels** se note $\mathbb{R}$ (vient de l'allemand « Real ») et représente l'ensemble de tous les nombres.

Propriété :

Tout **nombre rationnel** est un aussi un nombre réel.

Ainsi $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Remarque : « millefeuille ensembliste »

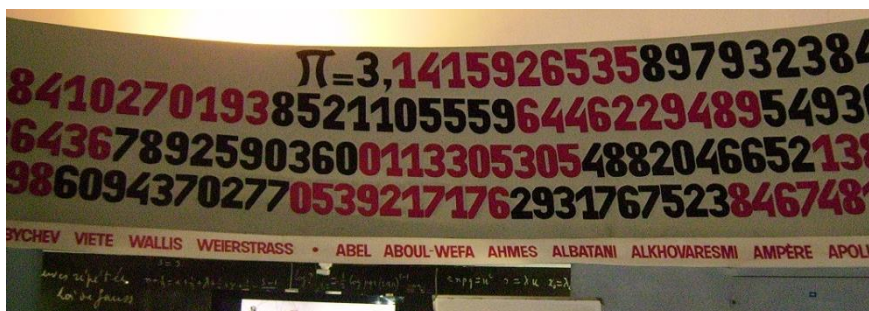


Remarque importante :

$\mathbb{R}$ est formé par les **rationnels** mais aussi par des nombres qui ne sont pas **rationnels** comme : π ; $\sqrt{2}$; Ces nombres sont des **irrationnels**.

(palais de la découverte , salle consacrée aux maths)

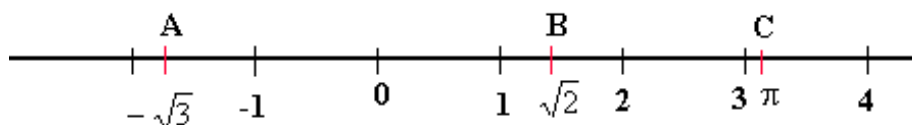
La partie décimale des **irrationnels** est infinie et non périodique.



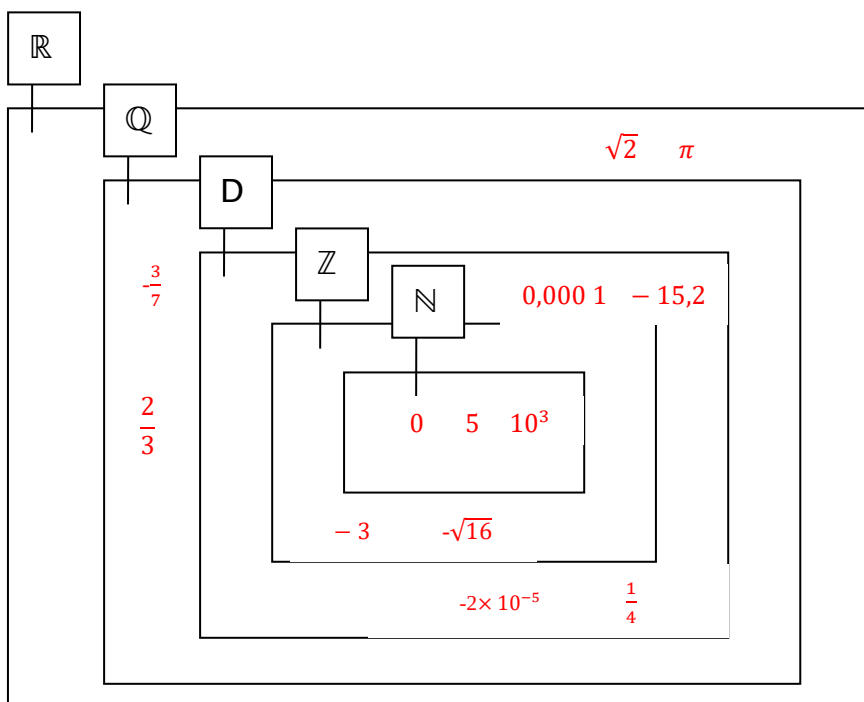
Théorème :

On assimile l'ensemble des réels à l'ensemble des abscisses des points d'une droite graduée que l'on appelle **droite des réels**.

Exemple : représentation sur la droite des réels des réels suivants $-\sqrt{3}$; $\sqrt{2}$; π



Placer dans le schéma les réels suivants : $0,000\ 1$; -3 ; 0 ; $\frac{2}{3}$; $\sqrt{2}$; 5 ; $-\frac{3}{7}$; $-15,2$; π ; $-\sqrt{16}$; -2×10^{-5} ; $\frac{1}{4}$; 10^3 .



Remarque : On retrouve les inclusions suivantes : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

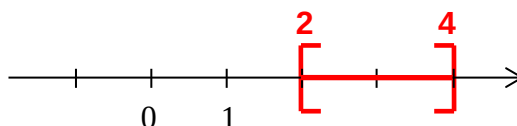
Bilan : Vidéo : mathssa.fr/nombres

v- Les intervalles de $\mathbb{R}$:

Vidéo : mathssa.fr/interv1 de 0 à 4mns40s

1. Notations

L'ensemble de tous les nombres réels x tels que $2 \leq x \leq 4$ peut se représenter sur une droite graduée.



Cet ensemble est appelé un **intervalle** et se note : $[2; 4]$

$2 \in [2; 4]$ $4 \in [2; 4]$ $5 \notin [2; 4]$

Vidéo : mathssa.fr/interv1 de 4mns40s à 12mns30s

2. Intervalle ouvert et intervalle fermé

Définitions :

On dit qu'un intervalle est **fermé** si ses extrémités appartiennent à l'intervalle.

On dit qu'il est **ouvert** dans le cas contraire.

Exemples :

- L'intervalle $[-2; 5]$ est un intervalle fermé.

On a : $-2 \in [-2; 5]$ et $5 \in [-2; 5]$

- L'intervalle $]2 ; 6[$ est un intervalle ouvert.

On a : $2 \notin]2 ; 6[$ et $6 \notin]2 ; 6[$

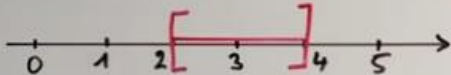
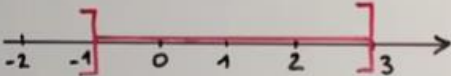
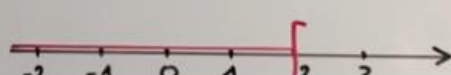
- L'intervalle $]6 ; +\infty[$ est également un intervalle ouvert.

Nombres réels x	Notation	Représentation
$2 \leq x \leq 4$	$[2 ; 4]$	
$-1 < x \leq 3$	$] - 1 ; 3]$	
$0 \leq x < 2$	$[0 ; 2[$	
$2 < x < 4$	$]2 ; 4[$	
$x \geq 2$	$[2 ; +\infty[$ ∞ désigne l'infini	
$x > -1$	$] - 1 ; +\infty[$	
$x \leq 3$	$] - \infty ; 3]$	
$x < 2$	$] - \infty ; 2[$	

Remarques :

- la représentation graphique d'un intervalle est soit un segment, soit une demi-droite. C'est donc une partie de $\mathbb{R}$ représentée en un seul morceau.
- Par convention, $+\infty$ (plus l'infini) ou $-\infty$ (moins l'infini) ne sont pas des nombres, ce sont des symboles. Du côté $+\infty$ ou $-\infty$, le crochet est toujours ouvert. On n'a pas le droit d'utiliser $+\infty$ ou $-\infty$ dans des inégalités !!!
- On peut écrire $\mathbb{R}$ comme étant $] - \infty ; +\infty[$
- $]a ; a[= \emptyset$
- Attention à l'ordre des bornes, l'intervalle $[1 ; -3]$ n'a aucun sens.

Application : Compléter le tableau à l'aide de la vidéo : mathssa.fr/interv2

INÉGALITÉ	INTERVALLE	REPRÉSENTATION
$2 \leq x \leq 4$	$[2; 4]$	
$-1 < x \leq 3$	$] -1; 3]$	
$x < 2$	$]-\infty; 2[$	
$1 \leq x$	$[1; +\infty[$	